Anfangsgründe

der

Mechanik fester Körper

mit

vielen Uebungsaufgaben

zum Schulgebrauche

für Gymnasien und technische Lehranstalten

von

Dr. Joh. Christ. Walberer,
Professor der Mathematik und Physik.

Münnerstadt 1869.

Druck von Friedrich Ernst Thein in Würzburg.

Anfangsgründe

der

Mechanik fester Körper

mit

vielen Uebungsaufgaben

zum Schulgebrauche

an Gymnasien und technischen Lehranstalten

von

Dr. Joh. Christ. Walberer,

Professor der Mathematik und Physik.

Münnerstadt 1869.

Druck von Friedrich Ernst Thein in Würzburg.

Vorwort.

Die Mechanik ist ein so hervorragender Gegenstand des Unterrichts, daß wir ihre Einführung an unsern Gymnasien als ein glückliches Ereigniß bezeichnen müssen. Denn einerseits schließt sie sich so innig und unmittelbar an die Geometrie an, daß sie gewisser Massen als integrirender Theil der Mathematik betrachtet werden kann; andrerseits nimmt sie durch ihre Verzweigung in den Naturwissenschaften und durch die ausgedehnte Anwendung ihrer Lehren in fast allen Sphären des menschlichen Lebens, von der einfachsten Werkstätte bis zur complicirtesten Einrichtung der Fabriken für Kunst und Industrie unser Interesse in so hohem Grade in Anspruch, wie kaum eine andere Disciplin der Wissenschaft. Von allen Hindernissen, mit welchen der Lehrer zu kämpfen hat, wenn er diesen Unterricht in der vorgeschriebenen Ausdehnung fruchtbar machen will, ist nach meinem Dafürhalten das lästige und zeitraubende Diktiren das größte. Dieser Umstand und die geringe Auswahl passender Lehrmittel überhaupt und

insbesondere auf einheimischen Boden haben mich veranlaßt zunächst im Interesse meiner Schüler durch Veröffentlichung dieser Anfangsgründe zur Steuerung dieses Uebels nach Kräften beizutragen.

Wahl und Anordnung des Lehrstoffes entsprechen dem vorgeschriebenen Lehrprogramm, welches nur in einigen Punkten um ein Geringes überschritten wurde. (Kräftepaare, Stoß, Reibung.) Im Uebrigen hatte ich ausschließlich die Schule im Auge und wählte deßhalb zur Darstellung des Lehrstoffes eine Form, welche trotz allen Gegnern durch hundertjährige Erfahrungen die Feuerprobe bestanden hat. Diejenigen meiner Herrn Collegen, welche sich die Mühe nicht gereuen lassen, Einsicht davon zu nehmen, mögen nicht vergessen, daß alles menschliche Schaffen unvollkommen ist, und auch das beste Buch individuelle Wünsche unbefriedigt läßt.

Schließlich fühl ich mich verpflichtet, Herrn Buchdrucker Thein in Würzburg für die gefällige typographische Ausstattung, sowie Herrn Xylographen Link in München für die sorgfältige und correkte Ausführung der Holzschnitte meine volle Anerkennung auszusprechen.

Münnerstadt im April 1869.

Der Verfasser.

Inhalt.

I. Theil. Statik fester Körper.

II. Theil. Dynamik.

III. Theil. Aufgaben.

A. Ueber das Gleichgewicht.

B. Aus der Dynamik.

Einleitung. Grundbegriffe.

§ 1. Ruhe und Bewegung. Ein Körper befindet sich im Zustande der Ruhe, wenn er beständig denselben Ort im Raume einnimmt; er ist dagegen in Bewegung, wenn er diesen Ort nach und nach ändert.

§ 2. Kräfte. Jeder Körper bleibt erfahrungsgemäß so lange im Zustande der Ruhe oder Bewegung, als er nicht durch äußere Ursachen daran gehindert wird. Diese äußeren Ursachen heißen Kräfte, und das Prinzip, daß kein Körper aus sich selbst den Zustand der Ruhe oder Bewegung abzuändern vermag, heißt das Gesetz der Trägheit. —

Bei jeder Kraft kommen drei Dinge in Betracht: 1) die Größe oder Intensität, 2) die Richtung, und 3) der Angriffspunkt derselben.

Die Größe oder Intensität einer Kraft bestimmen wir aus der Größe der Wirkung, welcher ein bestimmter Körper unterworfen ist; die Richtung einer Kraft fällt mit der Geraden zusammen, in welcher der Körper zur Bewegung angetrieben wird; Angriffspunkt ist die Stelle des Körpers, an welcher die Kraft thätig ist. Die Wirkung einer jeden Kraft auf einen materiellen Körper ist Antrieb zur Bewegung, welche, wie später erhellen wird, immer geradlinig erfolgt, wenn nicht andere Kräfte zugleich thätig sind. Die gerade Linie ist daher das natürlichste Mittel, nicht bloß die Quantität der Bewegung, sondern zugleich auch die Größe und Richtung einer Kraft graphisch darzustellen.

§ 3. Masse und Dichtigkeit. Wirkt ein und dieselbe Kraft auf verschiedene Körper, so ist der Erfolg der Kraftäußerung, wie die Erfahrung lehrt, verschieden, je nachdem der Körper mehr oder weniger Masse (Stoffmenge) hat. Dagegen sagen wir, zwei Körper haben gleiche Massen, wenn unter denselben Umständen gleiche Kräfte gleiche Wirkung hervorbringen. Aus dem Begriffe der Gleichheit zweier Kräfte ergibt sich ohne Mühe der des Verhältnisses. Aus diesem Grunde können Kräfte auch durch Zahlen ausgedrückt werden. Bringt eine nfache Kraft auf einen Körper A dieselbe Wirkung hervor, als die einfache Kraft auf den Körper B, so schließen wir, die Masse in A ist die nfache von B. Es kommt aber bei den meisten Fragen der Mechanik nicht bloß auf die Masse allein, sondern auch auf den Raum, den die Masse einnimmt, d. i. auf das Volumen der Masse an. Hat ein Körper A in demselben Volumen mehr Masse als der Körper B, so sagen wir, A ist dichter als B. Wir erhalten allgemein die Dichtigkeit D eines Körpers, wenn wir seine Masse M gleichmäßig auf sein Volumen V vertheilen und die Menge bestimmen, welche in dem zur Einheit angenommenen Volumen enthalten ist. Dem zufolge erhalten wir

$$D = \frac{M}{V} \text{ oder } M = DV$$

Da nun die Wirkungsweise einer Kraft wesentlich von der Masse nnd Dichtigkeit der Körper abhängig ist, so betrachten wir zur Vereinfachung der Aufgabe vorerst nur materielle Punkte, deren Dichtigkeit und Masse als Einheit angenommen werden kann, und die Körper als Systeme materieller Punkte.

§ 4. Aufgabe der Mechanik. Ist ein Körper der Einwirkung mehrerer Kräfte unterworfen, so wird derselbe entweder in Ruhe bleiben oder in Bewegung übergehen. Den ersteren Fall untersucht die Statik, den letzteren die Dynamik. Statik ist also die Lehre von dem Gleichgewicht, Dynamik die Lehre von der Bewegung der Körper; beide Theile zusammen machen den Inbegriff der Mechanik aus.

I. Theil.

Statik fester Körper.

Erstes Kapitel.

Zusammensetzung der Kräfte an einem Punkte.

§ 5. Erklärung. Ist ein starres System materieller Punkte in keinem seiner Punkte befestigt, so heißt das System frei.

§ 6. Erklärung. Wirken mehrere Kräfte auf ein freies Punktesystem, und es bleibt dasselbe in Ruhe, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht. Zwei Kräfte, welche sich das Gleichgewicht halten, heben sich auf.

§ 7. Grundsätze. Der Zustand des Gleichgewichts bleibt ungeändert:

1) wenn man einen oder mehrere Angriffspunkte festmacht;
2) wenn man neue Kräfte anbringt, welche unter sich im Gleichgewicht sind;
3) wenn man Kräfte wegläßt, welche unter sich im Gleichgewicht sind und die Wirkungsweise der übrigen Kräfte nicht ändern.

§ 8. Grundsatz. Die Wirkungsweise einer Kraft bleibt dieselbe, wenn man neue Kräfte anbringt, welche unter sich Gleichgewicht halten.

§ 9. Grundsatz. Wirken zwei Kräfte auf ein Punktesystem, so halten sie sich nur dann das Gleichgewicht, wenn sie an Intensität gleich, ihrer Richtung nach entgegengesetzt sind und überdieß die Verbindungsgerade der Angriffspunkte mit den Richtungen zusammenfällt. In jedem andern Falle halten sie sich das Gleichgewicht nicht. Dieses letztere tritt ein, wenn beide Kräfte ungleich sind, oder wenn sie nach derselben Richtung

oder unter einem Winkel wirken, oder wenn die geradlinige Verbindung der Angriffspunkte die Kraft-Richtungen schneidet.

Halten sich umgekehrt zwei Kräfte das Gleichgewicht, so sind sie nothwendig an Intensität gleich, der Richtung nach entgegengesetzt, Richtung und Angriffspunkte fallen in eine Gerade.

§ 10. Lehrsatz. Eine Kraft bringt dieselbe Wirkung hervor, wenn ihr Angriffspunkt an eine andere Stelle ihrer Richtung verlegt wird.

Beweis. Es sei (Fig. 1.) ein freier Punkt A von der Kraft P in der Richtung AP angegriffen. Bringen wir in einem beliebigen Punkte B der Geraden AB zwei neue Kräfte P_1 und P_2, welche unter sich und der ersten Kraft P gleich sind, in der Richtung der Pfeile an, so halten sich (§. 9) P_1 und P_2 das Gleichgewicht, ändern also (§. 8) die Wirkung von P nicht. Andrerseits heben sich die in A wirkenden Kräfte P und P_1 auf, so daß nur P_2 in B wirksam bleibt. Es ist daher ganz einerlei, entweder P in A oder P_2 in B nach derselben Richtung wirken zu lassen, was schließlich nichts anderes bedeutet, als daß der Angriffspunkt A nach B verlegt worden ist.



Anmerkung. Die Betrachtung bleibt dieselbe, wenn man die 3 Kräfte in entgegengesetzter Richtung wirken läßt; in beiden Fällen wird die Verbindung von A und B starr vorausgesetzt.

§ 11. Zusatz. Bringen zwei Kräfte P und P_2 in A und B einzeln dieselbe Wirkung hervor, so sind sie an Intensität gleich und nach derselben Richtung thätig.

§ 12. Erklärung. Wirken zwei oder mehrere Kräfte auf ein starres, aber freies System materieller Punkte, so ist es oft möglich, durch Einführung einer neuen Kraft R_1 Gleichgewicht herzustellen. In diesem Falle hebt R_1 die Gesammtwirkung der übrigen Kräfte auf; andrerseits wird aber R_1 durch Einführung einer gleichen und entgegengesetzten Kraft R aufgehoben. Läßt man also R_1 durch R aufheben, so ist die Wirksamkeit der ge-

gebenen Kräfte frei; läßt man dagegen diesen Kräften durch R_1 das Gleichgewicht halten, so ist R allein thätig. Daraus geht hervor, daß die Wirkung von R dieselbe sein muß, als die aller gegebenen Kräfte, daß sie also diese Kräfte zu ersetzen vermag. Diese Kraft R heißt Resultante oder Mittelkraft, die gegebenen Kräfte heißen Componenten oder Seitenkräfte.

§ 13. Folgerung. Da nach § 10 der Angriffspunkt der Resultante R an jeder Stelle ihrer Richtung verlegt werden darf, so muß es auch erlaubt sein, alle Componenten an dieser Stelle wirken zu lassen. Bringen umgekehrt mehrere Kräfte in B dieselbe Wirkung hervor als in A, so fällt AB in die Richtung der Resultante.

§ 14. Folgerung. Wirken zwei Kräfte $P > Q$ auf einen Punkt in ein und derselben Geraden, so ist ihre Resultante

$$R = P + Q,$$

wenn sie in gleicher Richtung thätig sind; dagegen ist

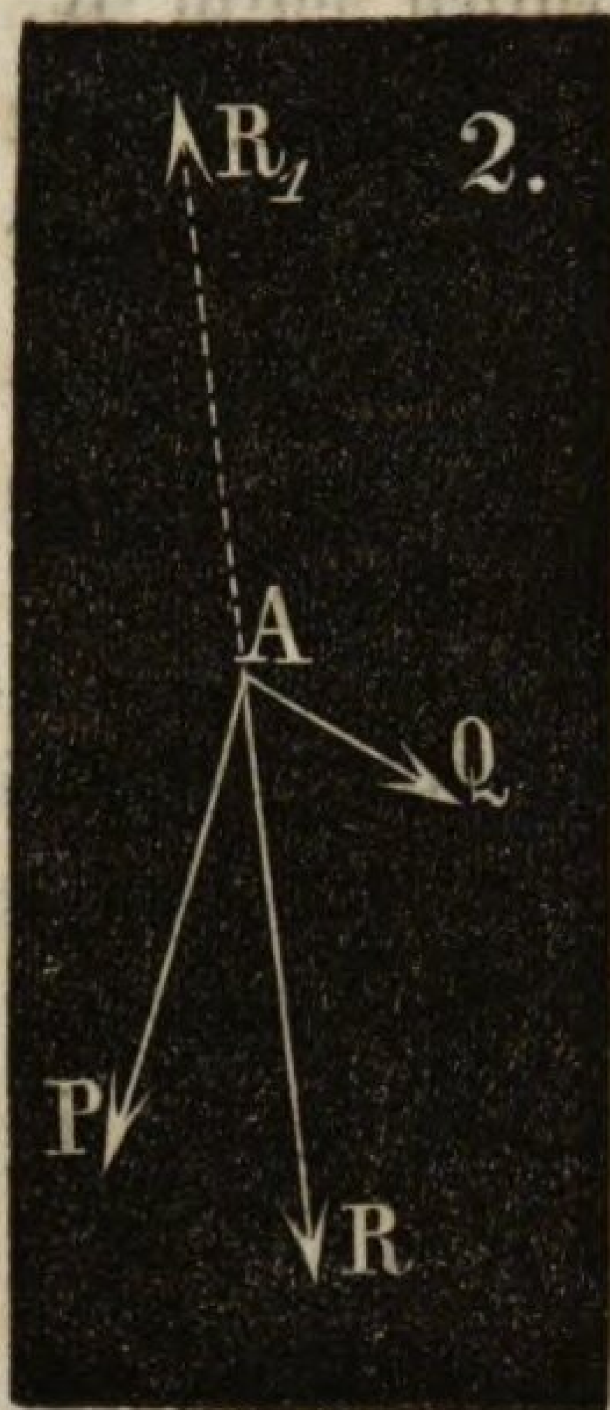
$$R = P - Q,$$

wenn sie in entgegengesetzter Richtung wirken. Sind im ersten Falle beide Kräfte gleich, so ist $R = 2P$; wird der Punkt von n gleichen Kräften angegriffen, so ist $R = nP$.

§ 15. Folgerung. Kräfte, welche nur einen Punkt angreifen und nicht im Gleichgewicht sind, haben immer eine Resultante. Denn die Bewegung des Punktes erfolgt nothwendig in einer bestimmten Richtung, welche unter allen Umständen durch eine Einzelkraft aufgehoben werden kann.

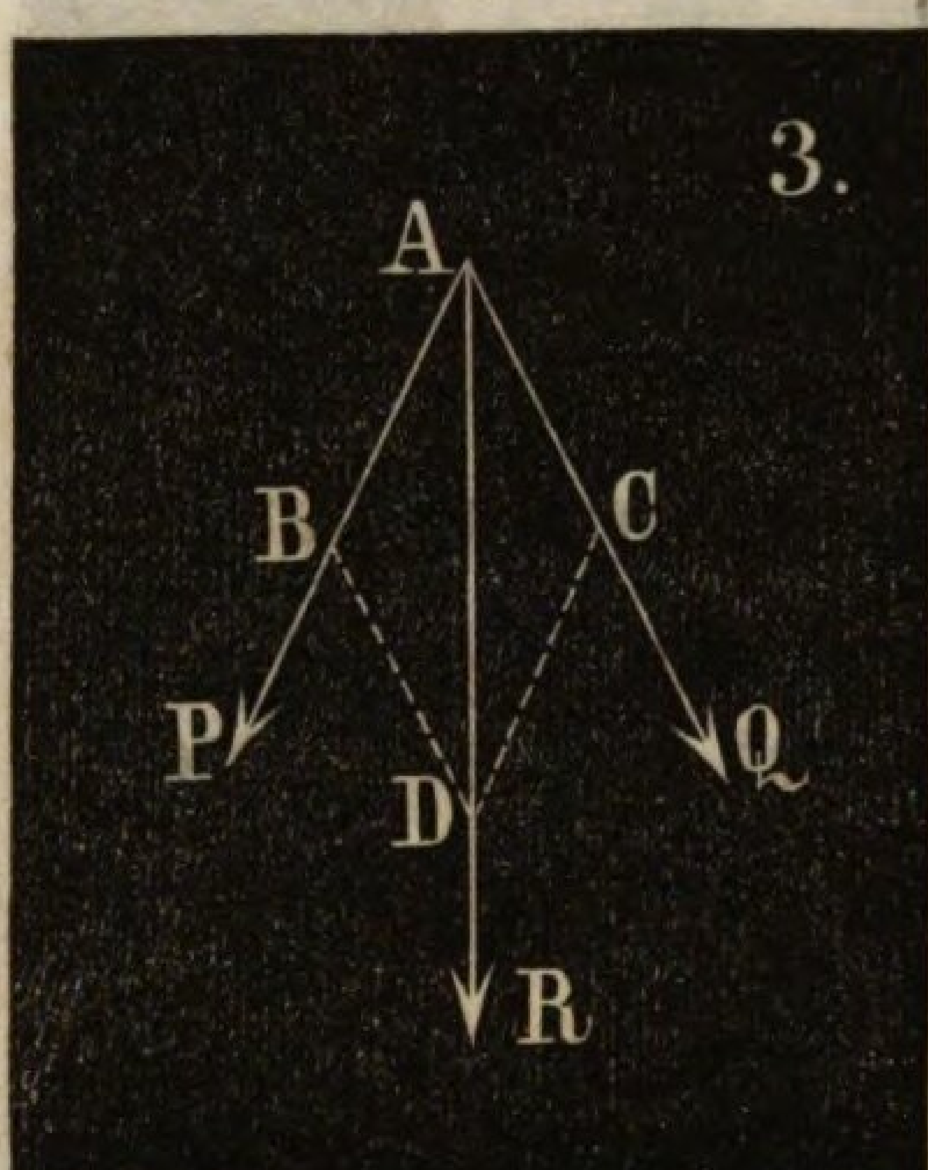
§ 16. Lehrsatz. Die Resultante R zweier auf einen Punkt wirkenden Kräfte P und Q liegt in der Ebene dieser Kräfte und zwar innerhalb des hohlen Winkels beider Kräfte.

Beweis. Denken wir uns den Punkt A (Fig. 2) von drei Kräften P, Q, R, angegriffen, welche sich Gleichgewicht halten, so besteht kein Grund, warum eine dieser Kräfte lieber auf der einen, als auf der andern Seite der Ebene der beiden andern Kräfte liegen sollte; mithin wirken die 3 Kräfte in einerlei Ebene. Wäre der Punkt A von der Kraft P allein angegriffen,



so müßte er sich von A nach P bewegen; durch den Hinzutritt der Kraft Q wird er von der Richtung AP gegen AQ hin abgelenkt, so daß die Bewegung nur innerhalb des hohlen Winkels PAQ erfolgen kann. Diese Bewegung muß überdieß geradlinig sein; denn sonst könnte sie nicht durch eine Einzelkraft R_1 aufgehoben werden, was wegen Gleichgewicht der 3 Kräfte stattfinden muß. Da nun die Resultante R von der Kraft R_1 im Gleichgewicht gehalten wird, so wirken beide Kräfte (§ 9) in einerlei Geraden, welche in der Ebene PAQ liegen muß, weil auch AR_1 in ihr liegt.

§ 17. Lehrsatz. Wirken zwei gleiche Kräfte $P = Q$ auf einen Punkt A (Fig. 3), so liegt ihre Resultante in der Diagonale AD eines Rhombus ABDC, welcher die Richtungen der Kräfte zu Seiten hat.



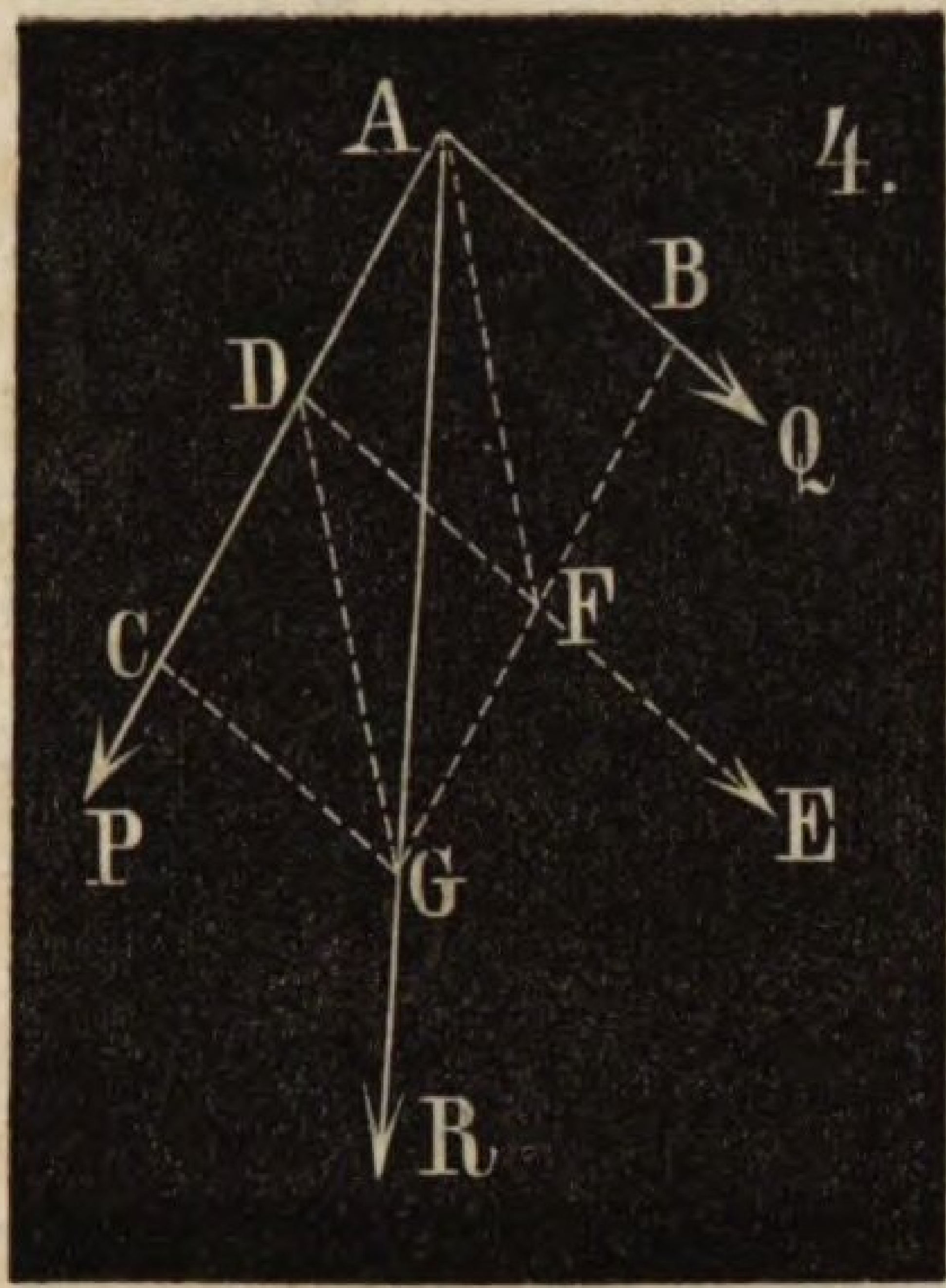
Beweis. Erstlich liegt die Resultante R innerhalb des Winkels PAQ; zweitens läßt sich nicht einsehen, warum die Richtung AR der einen Kraft näher liegen soll als der andern. AR liegt also vollkommen in der Mitte und halbirt den $\angle PAQ$, was bei jeder Diagonale eines Rhombus der Fall ist.

Folgerung. Die Seitenkräfte P und Q bringen in D und jedem andern Punkte der Diagonale AD (§. 13) dieselbe Wirkung hervor, als in A.

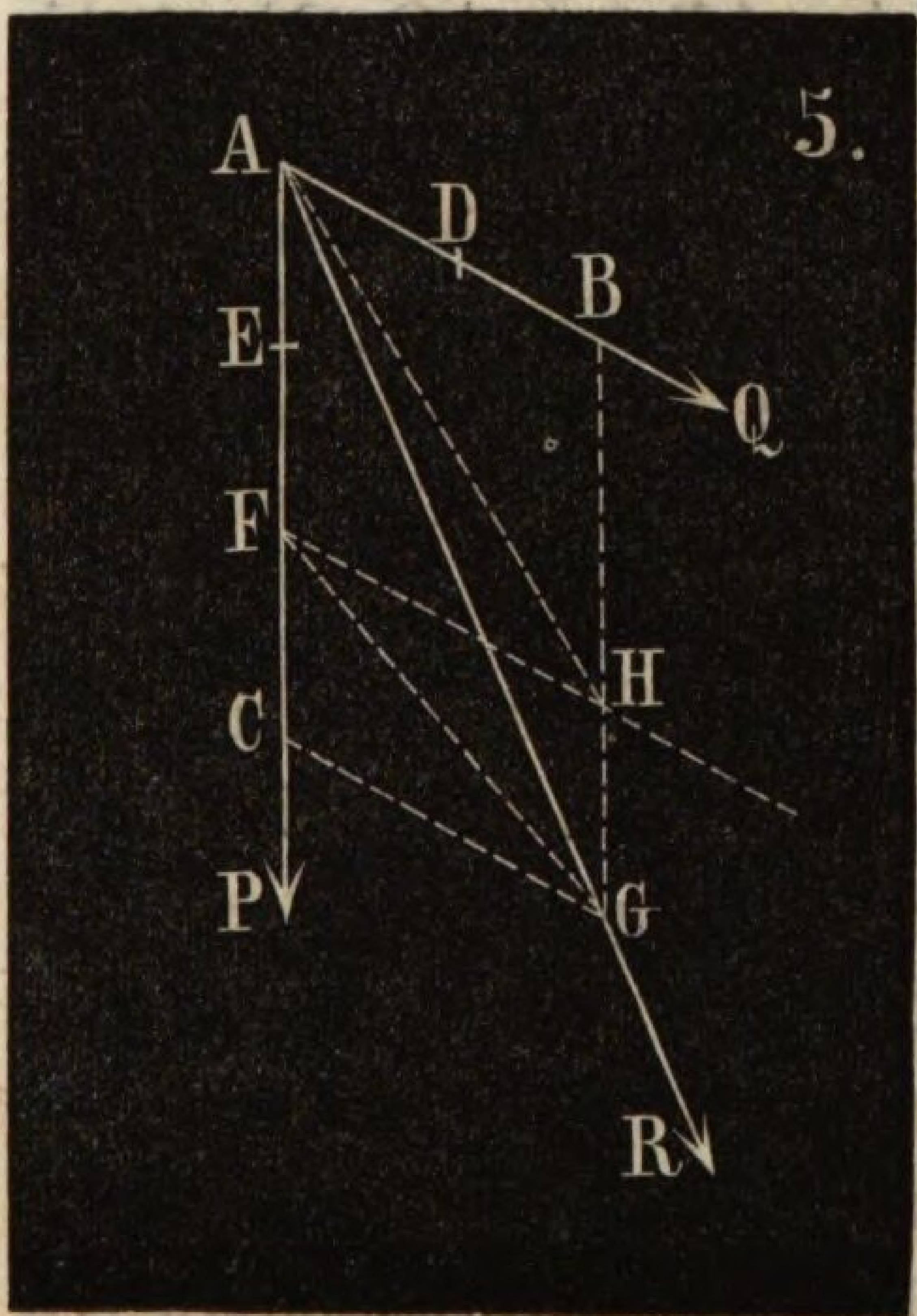
§ 18. Kräfteparallelogramm. Lehrsatz. Wirken zwei beliebige Kräfte P und Q auf einen Punkt A (Fig. 4 und 5), so ist ihre Resultante der Größe und Richtung nach durch die Diagonale eines Parallelogramms bestimmt, welches die beiden Kräfte zu Seiten hat.

Der Beweis zerfällt in zwei Theile.

a) Richtung der Resultante.



Angenommen die Kräfte wirken längs AP und AQ und seien in dem einfachen Verhältnisse 2 : 1, also P = 2 Q. In Rücksicht darauf sei AC = 2 AB und AD = AB, dann ABFD ein Rhombus und ABGE ein Parallelogramm, so fällt die Resultante der beiden gleichen Kräfte AB und AD in die Richtung AF und es lassen sich (§ 13) die Componenten von A nach F verlegen. Denken wir uns AD nach FG sowie AB nach FE verlegt, so können wir neuerdings FE in D und FG in G wirken lassen. Wir haben jetzt 3 gleiche Kräfte, von denen eine in G und die anderen zwei in D *) wirksam sind. Die Resultante dieser letzteren beiden liegt in der Diagonale DG des Rhombus CDFG; mithin können beide in G angebracht werden. Da nun die gegebenen Kräfte in G dieselbe Wirkung hervorbringen, als in A, so ist AG (§ 13) die Richtung der Resultante, welche mit der Diagonale des aus AB und AC construirten Parallelogramms zusammenfällt.



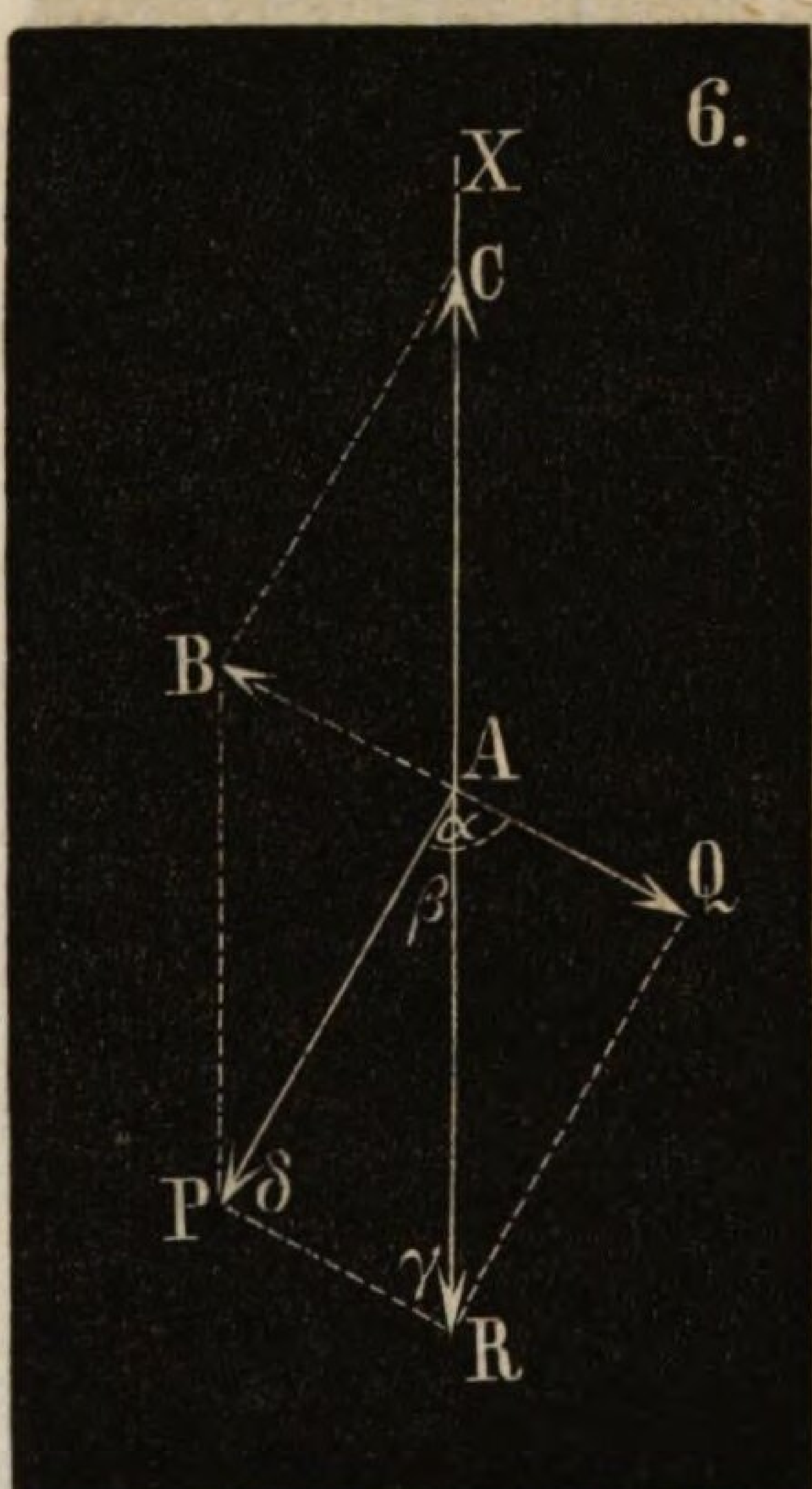
Nehmen wir an, P : Q = 3 : 2 und machen (Fig. 5) AD = BD = AE = EF = FC und ziehen BG ‡ AC sowie CG ‡ FH ‡ AB, so ist ABHF ein Rhombus und AH die Richtung der Resultante aus den Componenten AB und AF. Wir können daher, wie vorhin, den Angriffspunkt der Kraft AB

*) Weil wir uns vorstellen die Kraft AC bestehe aus AD + CD, deren Angriffspunkte selbstverständlich überall auf AC genommen werden können.

nach H und von da nach F, desgleichen den Angriffspunkt der Kraft AF nach H und von da nach G verlegen. Wir haben demnach die Kraft AF in G und zwei Kräfte FH und FC in F thätig, deren Resultante in die Diagonale FG fällt, weil FH = 2 FC und CFHG ein Parallelogramm ist. Es können daher auch diese beiden Kräfte nach G verlegt werden. Da demnach die gegebenen Kräfte in G dieselbe Wirkung als in A hervorbringen, so ist AG d. h. die Diagonale des aus AB und AC construirten Parallelogramms, auch in diesem Falle die Richtung der Resultante.

Haben die Kräfte P und Q ein anderes Verhältniß, etwa m : n, so führt eine ähnliche Betrachtung zu demselben Resultate. Sollte endlich das Verhältniß P : Q incommensurabel sein, so lassen sich immer zwei Zahlen m nnd n auffinden, welche als endliche Zahlen commensurabel sind und hinlängliche Genauigkeit gewähren. Die Diagonale des aus P und Q construirten Parallelogramms ist daher in allen Fällen die Richtung der Resultante.

b) Größe der Resultante.



Seien AP und AQ (Fig. 6) die beiden Kräfte der Größe und Richtung nach, APRQ das daraus gebildete Parallelogramm, so ist zu beweisen, daß AR die Resultante auch der Größe nach ist.

Denken wir uns in A eine der Resultante R gleiche und im entgegengesetzten Sinne nach AX wirkende Kraft R_1 angebracht, so muß sie den Kräften P und Q das Gleichgewicht halten.

Im Zustande des Gleichgewichts hält aber auch die Kraft Q den beibeiden andern P und R_1 das Gleichgewicht; mithin auch der aus P

und R_1 gebildeten Resultante, deren Richtung in die Verlängerung AQ fallen muß. Ziehen wir daher durch Punkt P eine Parallele zu AX, welche die AQ in B schneidet, und BC ⧧ PA, so ist AC die Größe derjenigen Kraft, welche den beiden gegebenen das Gleichgewicht hält. Denn jede andere Strecke bildet mit AP ein Parallelogramm, dessen Diagonale von AB abweicht, in welchem Falle nicht mehr Gleichgewicht bestehen kann. Wegen AC = BP und BP = AR, ist auch AC = AR, was zu beweisen war.

Anm. Zur Verhütung von Mißverständnissen sei wiederholt bemerkt, daß die Kräfte sich auf zweifache Art darstellen lassen; in der Rechnung setzen wir Zahlen, wie P, Q, R, in der Figur Linien, wie AP, AQ, AR.

§ 19. Zusatz. Bezeichnen wir den Winkel der zwei gegebenen Kräfte mit α, die des Dreieckes APR (Fig. 6) beziehungsweise mit β, γ, δ, so haben wir nach den Regeln der Trigonometrie

$$AP : PR : AR = \sin\gamma : \sin\beta : \sin\delta$$

$$AR^2 = AP^2 + PR^2 - 2\, AP.PR \cos\delta;$$

oder wenn wir die Linien durch Zahlen ausdrücken und bemerken, daß PR = AQ und $\delta = 180 - \alpha$, also $\sin\delta = \sin\alpha$ und $\cos\delta = -\cos\alpha$ ist:

$$1)\ P : Q : R = \sin\gamma : \sin\beta : \sin\alpha$$

$$2)\ R^2 = P^2 + Q^2 + 2\, P.Q \cos\alpha.$$

Vermöge dieser zwei Relationen ist R der Größe und Richtung nach durch Rechnung bestimmt. Zur Berechnung der Winkel kann man nach den Regeln der Trigonometrie anstatt (1) und (2) auch von den Gleichungen

$$(3)\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta) = \frac{P - Q}{P + Q} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha;$$

$$(4)\ \sin \tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(Q + R - P)(Q + P - R)}{4\, PR}}$$

Gebrauch machen.

Ist $\alpha = 90^0$, so ist einfacher

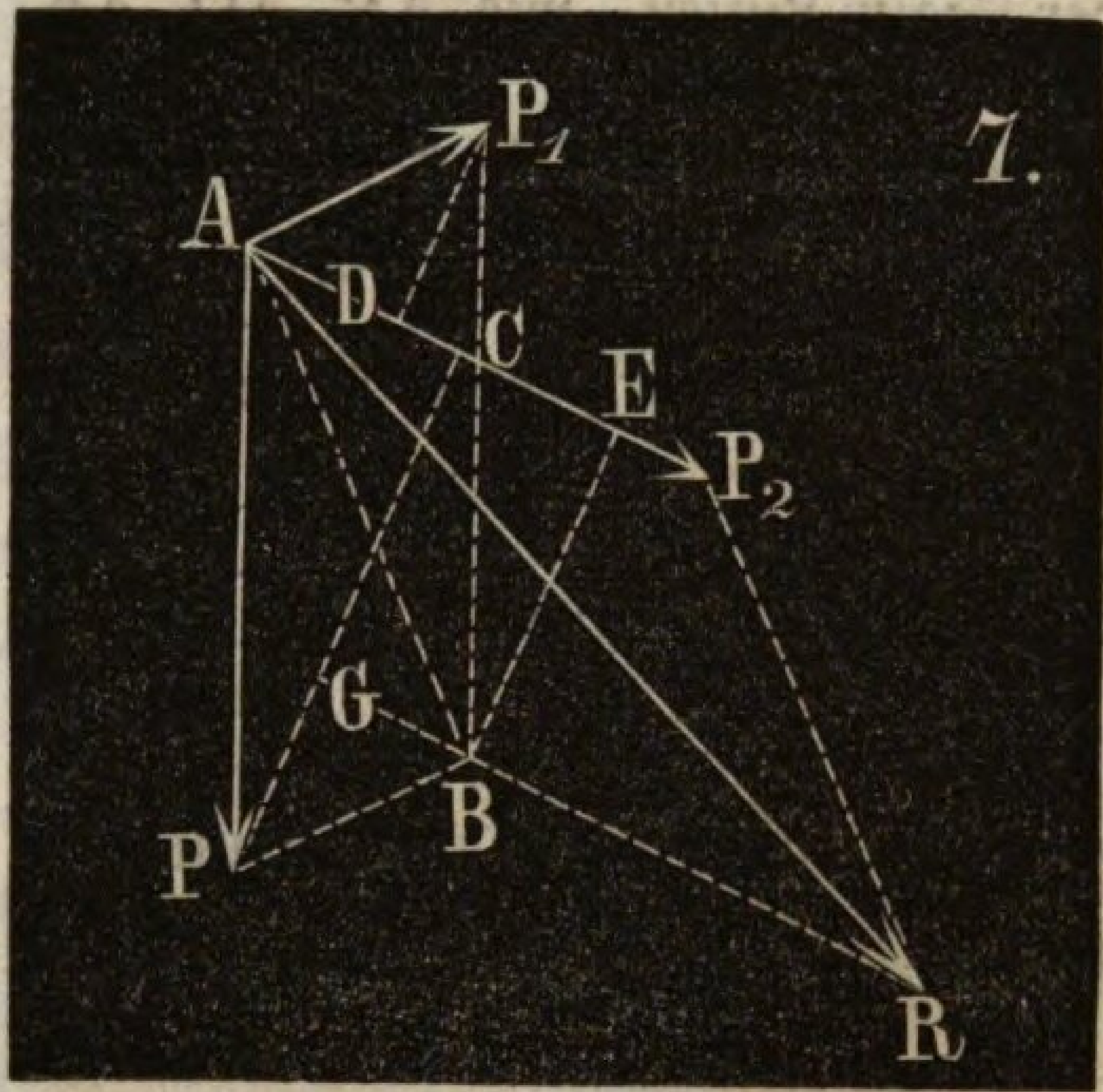
$$(5)\ R = \sqrt{P^2 + Q^2};\ P = R\cos\beta;\ Q = R\sin\beta,$$

und durch Division der letzten zwei Gleichungen

$$(6)\ \operatorname{tang}\beta = \frac{Q}{P}.$$

Anm. Der in § 18 aufgestellte Fundamentalsatz der Mechanik dient nicht bloß dazu, zwei Kräfte in eine zu verwandeln, sondern auch umgekehrt jede Einzelkraft in zwei Componenten von beliebiger Richtung zu zerlegen.

§ 20. Lehrsatz. Wirken mehr als zwei Kräfte auf einen Punkt A, so ist die Resultante der Größe und Richtung nach durch die Schlußseite eines Polygons ausgedrückt, dessen übrigen Seiten gleich und parallel den gegebenen Kräften sind.



7.

Bew. Betrachten wir drei Kräfte P, P_1, P_2, welche der Größe und Richtung nach (Fig. 7) durch AP, AP_1, AP_2 dargestellt sind, so haben AP und AP_1 die Diagonale AB als Resultante; das aus AB und AP_2 construirte Parallelogramm liefert AR als Resultante der drei gegebenen Kräfte, welche nichts anderes ist, als die vierte Seite des Viereckes APBRA, dessen übrigen drei Seiten den gegebenen Kräften gleich und parallel sind. Bei 4 Kräften schließt die Resultante ein Fünfeck u. s. w. Wird $R = 0$, so halten sich die gegebenen Kräfte Gleichgewicht und bilden unter sich ein geschlossenes Polygon.

§ 21. Zus. So wie durch Construction kann auch durch Rechnung die Resultante R gefunden werden. Bezeichnen wir (Fig. 7) mit α, β, γ die Winkel PAP_1, PAP_2, P_1AP_2, so ist

$$R^2 = P^2 + P_1^2 + P_2^2 + 2PP_1 \cos\alpha + 2PP_2 \cos\beta + 2P_1P_2 \cos\gamma.$$

Denn aus dem Parallelogramm $ABRP_2$ folgt nach § 19

$$AR^2 = AB^2 + AP_2{}^2 + 2\,AB\,.\,AP_2 \cos BAP_2\,;$$

aus dem Parallelogramm $APBP_1$ folgt ähnlich

$$AB^2 = AP^2 + AP_1{}^2 + 2\,AP\,.\,AP_1 \cos\alpha.$$

Drücken wir die Linien durch Zahlen aus und setzen $\angle BAP_2 = \varphi$, so folgt aus beiden Gleichungen

$$R^2 = P^2 + P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2\,PP_1 \cos\alpha + 2\,AB\,.\,P_2 \cos\varphi.$$

Um nun $AB \cos\varphi$ zu eliminiren, fällen wir von den Punkten P, P_1 und B Lothe auf AP_2; dann ist

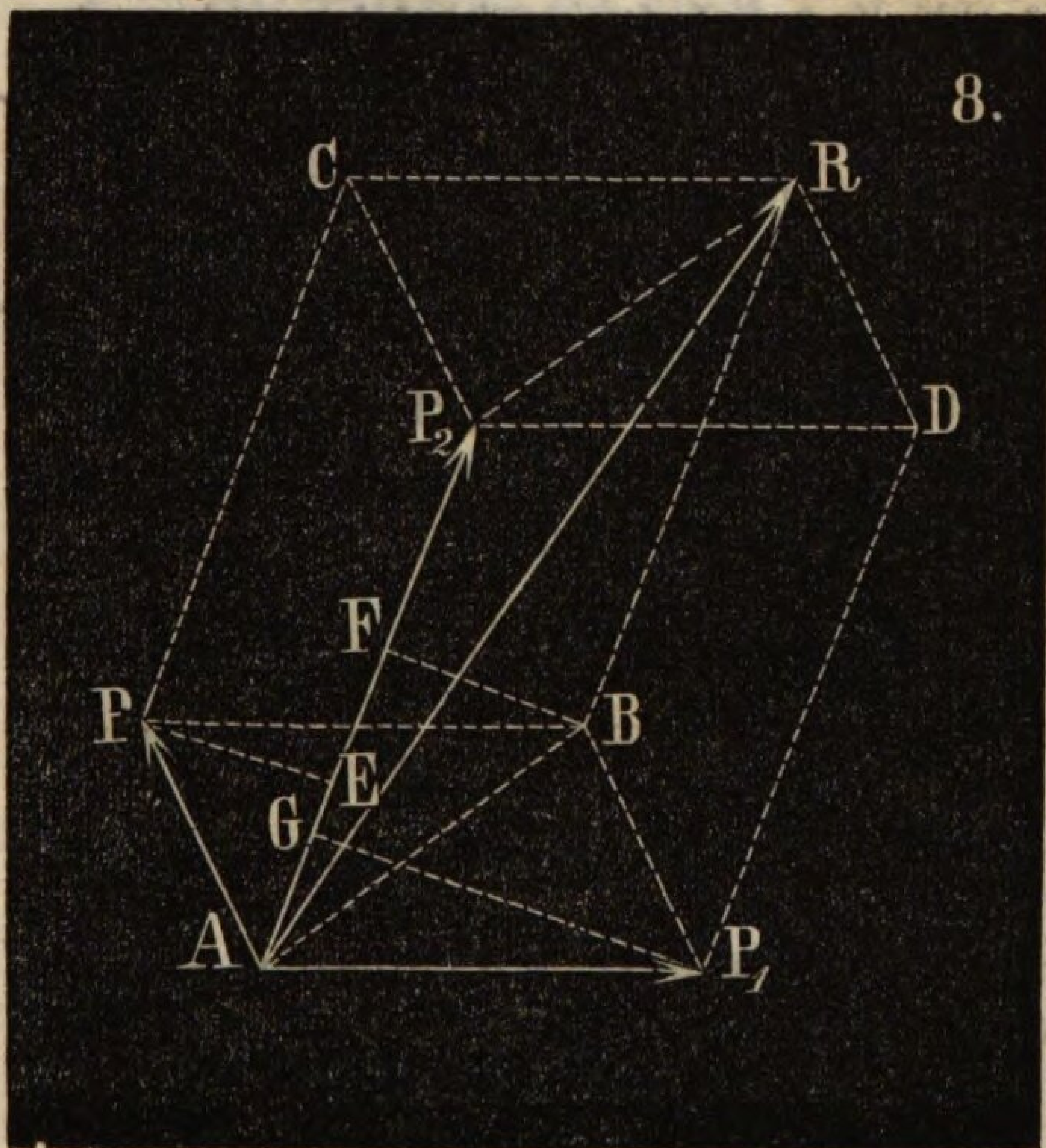
$$AE = AC + AD\text{*}),$$ oder was dasselbe ist

$$AB \cos\varphi = AP \cos\beta + AP_1 \cos\gamma = P \cos\beta + P_1 \cos\gamma.$$

Durch Substitution dieses Werthes erhalten wir obige Formel.

Es ließe sich auch für mehr als 3 Kräfte eine ähnliche Formel aufstellen, allein die entsprechenden Formeln würden immer verwickelter und zum Rechnen wenig brauchbar. Aus diesem Grunde vermeidet die Mechanik solche Formeln und zerlegt mit viel größerem Vortheil die gegebenen Kräfte in rechtwinkelige Componenten, wie in § 24 gezeigt wird.

§ 22. Lehrs. Die Resultante dreier Kräfte, welche einen Punkt A angreifen und nicht in einer Ebene liegen, ist der Größe und Richtung nach durch die Diagonale eines Parallelepipeds bestimmt, welches die drei Kräfte zu Kanten hat.



Bew. Seien die drei Kräfte der Größe und Richtung nach durch AP, AP_1, AP_2 dargestellt und Fig. 8 das damit construirte Parallelepiped, so ist AB die Resultante aus AP und AP_1, und AR die Resultante aus AB und AP_2; mithin ist AR, d. i. die Diagonale des Parallelepipeds, die Resultante der drei gegebenen Kräfte.

*) Da mir unbekannt ist, ob der in Anwendung gebrachte Satz

Zus. Sowie drei lassen sich durch fortgesetzte Anwendung des Lehrsatzes beliebig viele Kräfte im Raume auf eine Einzelkraft zurückführen und umgekehrt.

§ 23. Zus. Bezeichnen wir wie in § 21 mit α, β, γ beziehungsweise die Winkel, welche die drei Kräfte unter sich bilden, so ist die Resultante R ausgedrückt durch

$$R^2 = P^2 + P_1^2 + P_2^2 + 2PP_1 \cos\alpha + 2PP_2 \cos\beta + 2P_1P_2 \cos\gamma.$$

Denn aus dem Parallelogramm $ABRP_2$ ist nach § 19

$$AR^2 = AB^2 + AP_2^2 + 2AB.AP_2 \cos BAP_2;$$

aus dem Parallelogramm $APBP_1$ folgt ähnlich

$$AB^2 = AP^2 + AP_1^2 + 2AP.AP_1 \cos\alpha.$$

Setzen wir $\angle BAP_2 = \varphi$, und anstatt der Linien Zahlen, so folgt aus beiden Gleichungen

$$R^2 = P^2 + P_1^2 + P_2^2 + 2PP_1 \cos\alpha + 2AB . P_2 \text{ sos } \varphi.$$

Nun ist auch hier wie in Figur 7

$$AF = AE + AG, \text{ oder}$$

$$AB \cos\varphi = AP \cos\beta + AP_1 \cos\gamma = P \cos\beta + P_1 \cos\gamma.$$

Mit Hülfe dieses Werthes erhalten wir sofort die aufgestellte Formel.

Für ein rechtwinkeliges Parallelepiped ist $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$; mithin $\quad R = \sqrt{P^2 + P_1^2 + P_2^2}$

Anm. Vorstehende Formel ist mit jener in § 21 einerlei; doch besteht der Unterschied, daß dort jedesmal der dritte Winkel durch die beiden andern, etwa $\gamma = \alpha \pm \beta$ gegeben ist, und hier nicht.

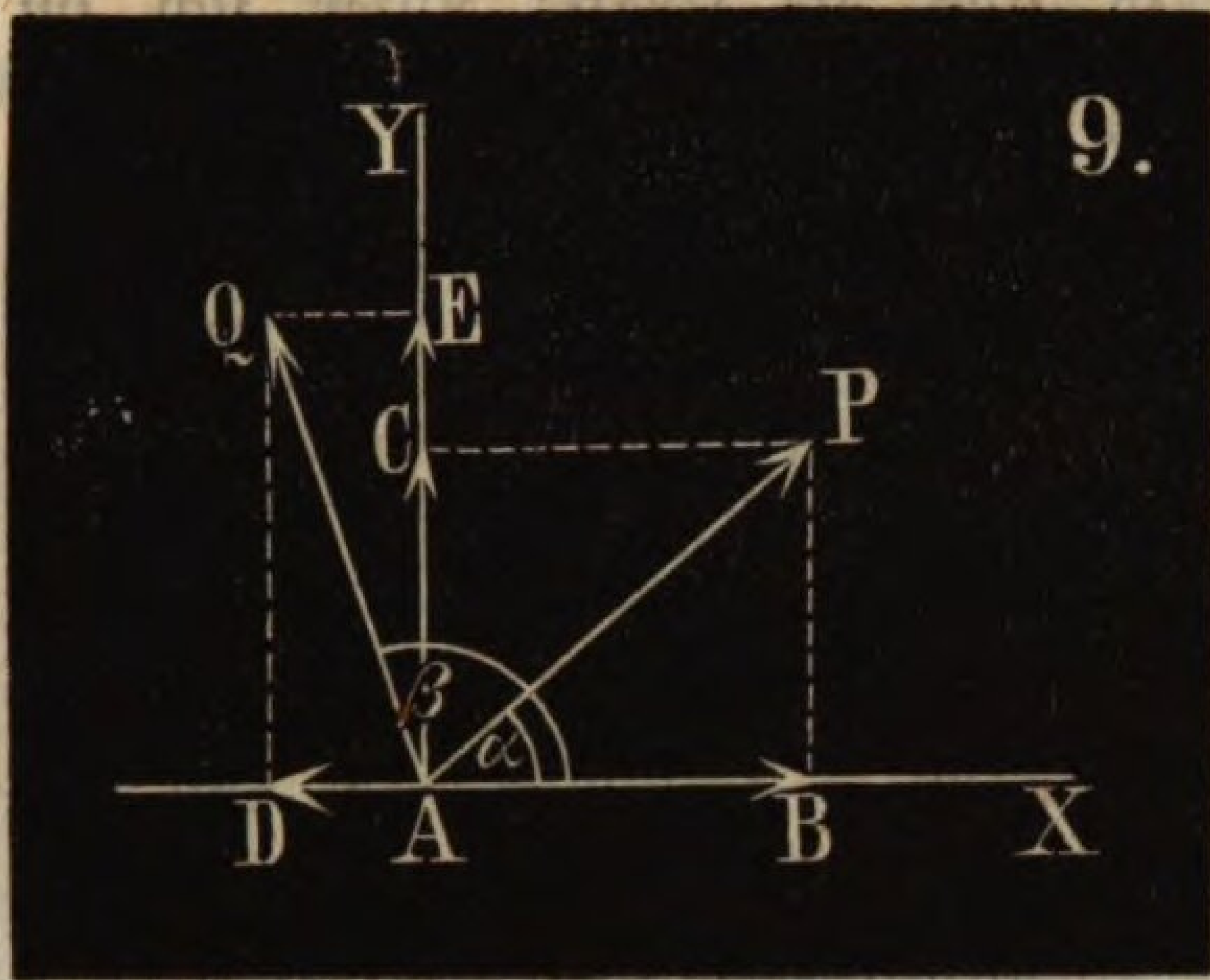
§ 24. Zerlegung in rechtwinkelige Componenten. Sei A (Fig. 9) der angegriffene Punkt, AX und AY zwei auf einander

---

sich anderswo findet, so sei er hier angeführt: „Die Projektion der Diagonale eines Parallelogramms auf irgend eine Gerade ist gleich der algebraischen Summe aus den Projektionen der anstoßenden zwei Seiten". Zum Beweise sei BG $\perp$ CP, dann ist

$$\triangle BGP \cong \triangle AP_1D,$$

folglich AD = BG = EC und daher auch AE = AC + AD.



senkrechte Richtungen, AP und AQ zwei gegebene Kräfte, α und β die Winkel, welche die Kräfte mit der geraden AX immer nach derselben Richtung bilden, also $\angle$ PAX $= \alpha$, $\angle$ QAX $= \beta$, so läßt sich AP in die rechtwinkeligen Componenten AB und AC *), die Kraft AP in AD und AE zerlegen. Nun ist

$$AB = AP \cos\alpha;\ AC = AP \sin\alpha$$
$$AD = AQ \cos\beta;\ AE = AQ \sin\beta.$$

Die in der Geraden AX wirkenden Componenten haben eine Resultante

$$X = AB - AD = AP \cos\alpha + AQ \cos\beta = P \cos\alpha + Q \cos\beta,$$

und die in AY wirkenden

$$Y = AC + AE = AP \sin\alpha + AQ \sin\beta = P \sin\alpha + Q \sin\beta.$$

Da nun X und Y auf einander senkrecht wirken, so haben sie zur Resultante (§ 19 (5)

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

welche mit der AX einen Winkel γ bildet, der ausgedrückt ist durch

$$\tang\gamma = \frac{Y}{X}$$

Sind beliebig viele Kräfte gegeben, so wird jede einzeln zerlegt, die algebraische Summe X und Y der längs AX und AY wirkenden Componenten hergestellt und schließlich die Resultante der Größe und Richtung nach aus den Gleichungen

$$R^2 = X^2 + Y^2;\ \tang\gamma = \frac{Y}{X}$$

*) Wie bekannt heißen in der Geometrie die Linien AB und AC die Projectionen der Geraden AP auf AX und AY, deren Vorzeichen einzig und allein vom Winkel α abhängen.

bestimmt. Wird $R = o$, so sind die Kräfte unter sich im Gleichgewicht; ist R nicht Null, so tritt Gleichgewicht ein, wenn eine neue Kraft eingeführt wird, welche R gleich und entgegengesetzt ist. Es ist daher unter allen Umständen möglich, die Resultante der Größe und Richtung nach zu bestimmen und die gegebenen Kräfte durch Einführung einer neuen Kraft in's Gleichgewicht zu bringen, auch dann noch, wenn die Kräfte in verschiedenen Ebenen liegen. Die einzige Bedingung ist, daß alle Kräfte denselben Angriffspunkt haben. Soll $R = o$ werden, so müssen X und Y d. h. die algebraische Summe der Projectionen auf zwei senkrechte Gerade zugleich Null werden.

§ 25. Zus. Setzt man rückwärts für X und Y ihre Werthe, so ist

$$R^2 = (P\cos\alpha + Q\cos\beta)^2 + (P\sin\alpha + Q\sin\beta)^2$$

$$R^2 = P^2\cos^2\alpha + 2PQ\cos\alpha\cos\beta + Q^2\cos^2\beta + P^2\sin^2\alpha + 2PQ\sin\alpha\sin\beta + Q^2\sin^2\beta$$

$$R^2 = P^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + P^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + 2PQ(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\beta - \alpha),$$

welche Formel mit der früheren in § 19 vollkommen übereinstimmt, da $\beta - \alpha$ der Winkel ist, welchen die zwei Kräfte einschließen.

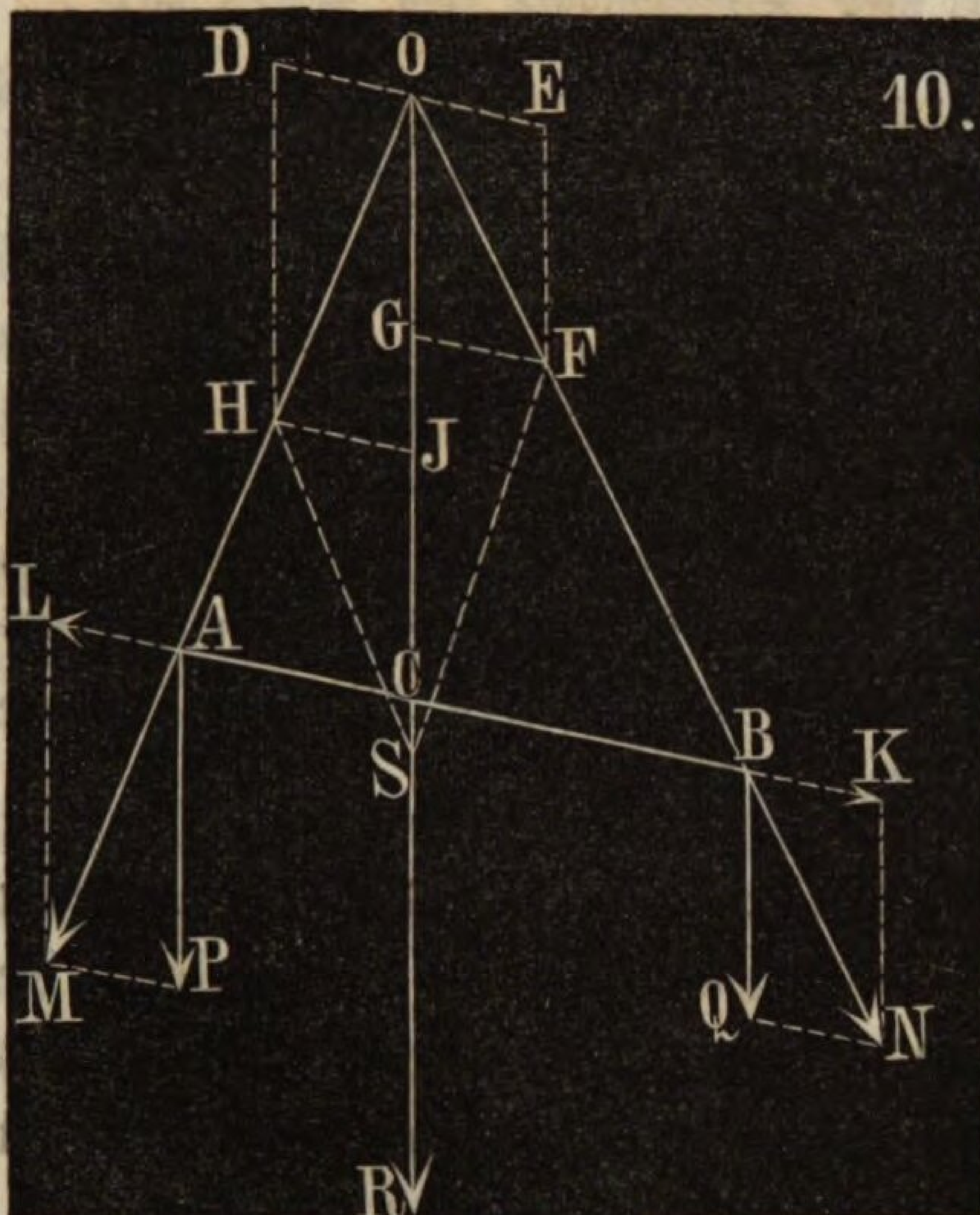
Zweites Capitel.

Resultante und Gleichgewicht paralleler Kräfte.

§ 26. Erklärung. Sind die Richtungen zweier Kräfte parallel, so heißen sie selbst parallel, wenn sie nach derselben Richtung hin wirken; dagegen antiparallel, wenn sie nach entgegengesetzter Richtung wirken.

§ 27. Lehrs. Zwei parallele Kräfte P und Q an zwei unveränderlich verbundenen Punkten A und B (Fig. 10) haben eine Resultante $R = P + Q$, deren Richtung in gleichem Sinne parallel und deren Angriffspunkt C die Gerade AB in zwei Strecken theilt, die sich umgekehrt verhalten wie P und Q.

Bew. Seien die Kräfte P und Q der Größe und Richtung nach durch AP und BQ dargestellt, so lassen sich in A und B



10.

zwei gleiche und entgegengesetzte längs AB wirkende Kräfte AL = BK anbringen, welche sich Gleichgewicht halten und die Wirkung von P und Q nicht stören. Andrerseits sind aber die jetzt in A und B wirkenden Kräfte durch ihre Resultante AM und BN ersetzt. Verlängert man beide Richtungen bis zu ihrem Durchschnitt in O, so läßt sich der Angriffspunkt beider Kräfte nach O verlegen. Macht man daher OH = AM und OF = BN und zerlegt diese Kräfte in die ursprünglichen Componenten der Größe und Richtung nach, so bringen sowohl die Resultanten OH und OF als auch ihre Componenten in O dieselbe Wirkung hervor, als die ursprünglichen Kräfte in A und B.

Von den Componenten in O heben sich OD und OE auf, und es bleiben OJ = AP und OG = BQ allein wirksam, so daß

$$OJ + OG = P + Q$$

die Resultante sowohl der in O, als auch der ursprünglichen in A und B wirksamen Kräfte P und Q ist. Diese Resultante wirkt in gleichem Sinne parallel wie P und Q und schneidet in ihrer Verlängerung die Gerade AB in einem Punkte C, dessen Lage sich mit Hülfe der ähnlichen Dreiecke

$$\triangle AMP \sim \triangle AOC, \text{ und } \triangle BNQ \sim \triangle BOC$$

bestimmen läßt. Denn es ist

$$AP : MP = OC : AC$$
$$NQ : BQ = BC : OC;$$

woraus durch Multiplikation folgt

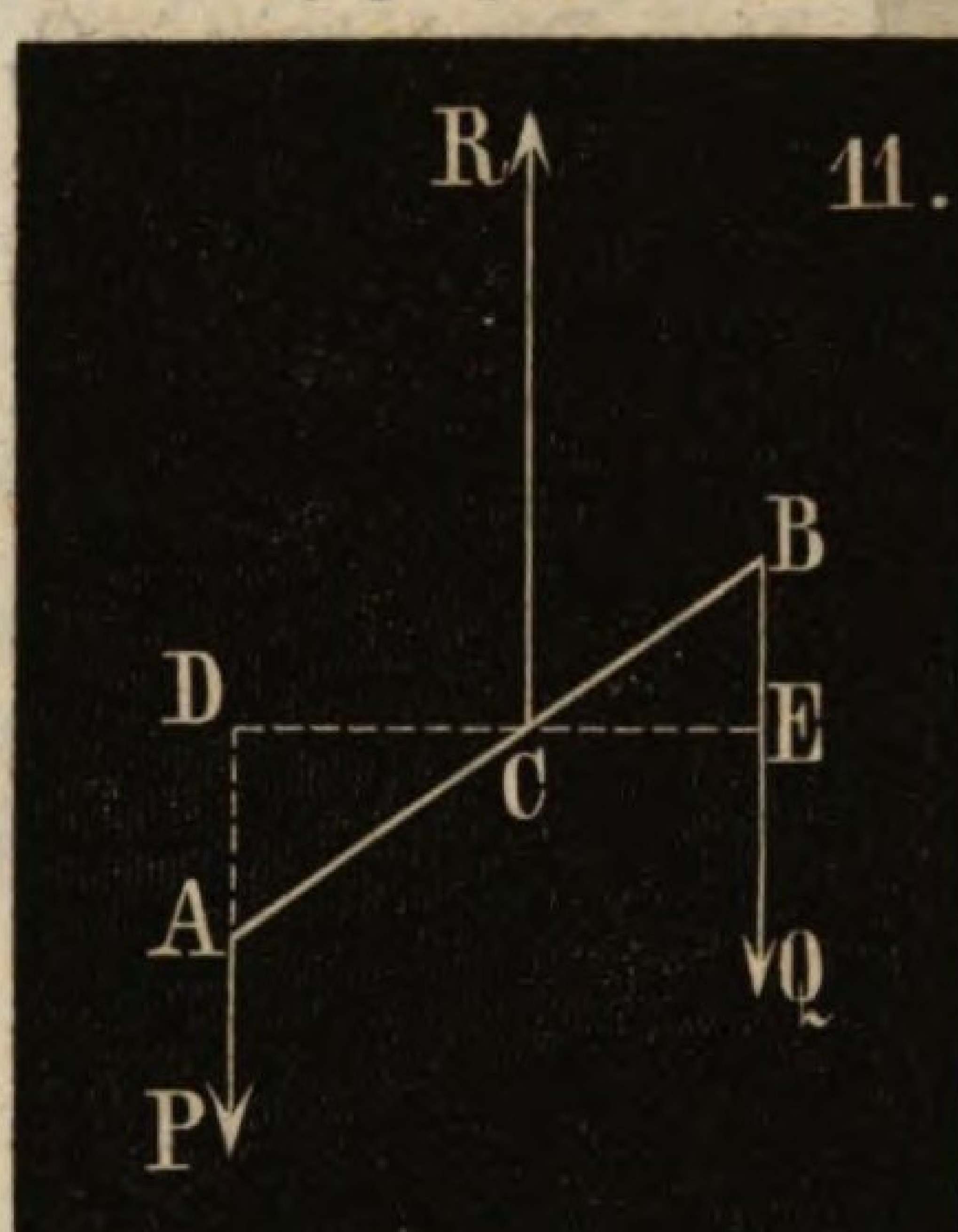
$$AP . NQ : MP . BQ = BC : AC;$$

oder in Berücksichtigung, daß $MP = NQ$

$$AP : BQ = BC : AC; \text{ oder}$$
$$P : Q = BC : AC; \text{ oder}$$
$$AC . P = BC . Q.$$

Zus. Sind in A und B zwei nicht parallele Kräfte, wie AM und BN gegeben, so läßt sich unmittelbar der Schnittpunkt O und durch das Parallelogramm OHSF Richtung, Größe und Angriffspunkt der Resultante R bestimmen.

§ 28. Zus. Da die Resultante R durch eine ihr gleiche und entgegengesetzte Kraft aufgehoben wird, so kann auch die Wirkung der Kräfte P und Q (Fig. 11) durch eine Einzelkraft CR aufgehoben werden, welche ihrer Summe gleich, der Richtung nach antiparallel ist und in einem Punkte C angreift, welcher durch die Gleichung



$$AC . P = BC . Q$$

bestimmt ist. Diesen Punkt C heißen wir in der Folge **Kräftemittelpunkt**. Derselbe ist von der Richtung der Kräfte gänzlich unabhängig.

§ 29. Zus. Ist $P = Q$, so liegt der Punkt C in der Mitte von AB; oder der geometrische Mittelpunkt ist zugleich Mittelpunkt der Kräfte.

§ 30. Zus. Halten sich umgekehrt drei parallele Kräfte P, Q, R an drei in einer Geraden liegenden Punkten A, B, C Gleichgewicht, so ist nothwendig R die größte von ihnen den beiden andern antiparallel und überdieß

$$(1)\ R = P + Q; \quad (2)\ AC . P = BC . Q.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt zugleich noch

(3) $AB.P = BC.R$; (4) $AB.Q = AC.R$.

Die letzten drei Gleichungen sind so beschaffen, daß jede die anderen ersetzen kann.

§ 31. Erkl. Jedes der vorigen Produkte aus Kraft und Entfernung des Angriffspunktes von einem zweiten Punkte heißt in der Mechanik das Moment der Kraft in Beziehung auf diesen zweiten Punkt und im Zustande des Gleichgewichts das statische Moment. So z. B. ist AC.P das Moment der Kraft P in Beziehung auf Punkt C, und AB.P ihr Moment in Beziehung auf Punkt B.

§ 32. Lehrs. Die Gleichheit der Momente zweier paralleler Kräfte bleibt ungestört, wenn man die senkrechte Entfernung des Kräftemittelpunktes von der Kraftrichtung einführt.

Denn ziehen wir (Fig. 11) $DE \perp CR$, so haben wir

$AC : BC = CD : CE$, aus $\triangle ACD \sim \triangle BCE$,

$AC : BC = Q : P$, aus der Voraussetzung;

folglich $CD : CE = Q : P$, oder

$CD . P = CE.Q$.

§ 33. Zus. Halten sich drei parallele Kräfte der vorigen Art Gleichgewicht, so hebt jede von ihnen die Wirkung der beiden andern auf und kann daher der Größe nach als Resultante der beiden andern betrachtet werden. Im Zustande des Gleichgewichts ist es nach § 7 gestattet, je einen der drei Angriffspunkte als fest zu betrachten. Denken wir uns z. B. den Punkt A fest, so sind nur die Kräfte R und Q wirksam zu denken. Diese Kräfte müssen aber nach § 30 der Bedingung

$$AB.Q = AC.R$$

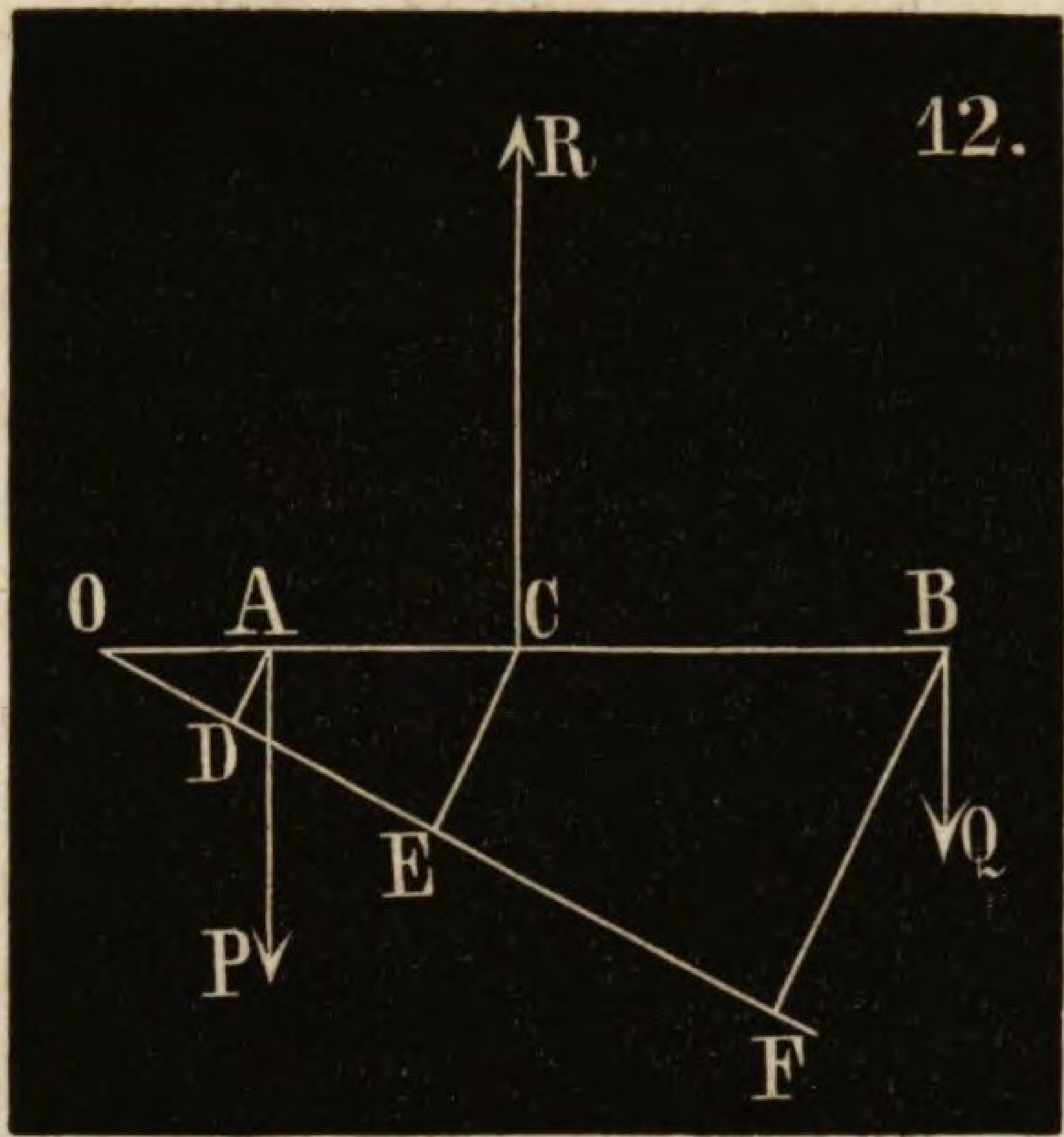
genügen. Denken wir uns den Punkt B fest, so haben wir P und R wirksam und als Bedingung des Gleichgewichts

$$AB.P = BC.R.$$

Da aber diese Produkte nichts anderes sind, als die statischen Momente in Beziehung auf den fest gedachten Punkt, so läßt sich folgender Satz aufstellen:

Halten drei parallele Kräfte an einer Geraden sich das Gleichgewicht, so sind ihre statischen Momente in Beziehung auf jeden der drei Angriffspunkte gleich.

§ 34. Lehrs. Zwei antiparallele Kräfte an einer Geraden haben eine Resultante, wenn sie der Größe nach ungleich sind, außerdem nicht.



Beweis. Sind (Fig. 12) die Kräfte P und R gegeben, und nehmen wir an, es könne durch eine Einzelkraft Q im Punkte B Gleichgewicht hergestellt werden, so müssen nach § 33 in Beziehung auf die Punkte A und C die Bedingungsgleichungen

$$AB.Q = AC.R$$
$$AC.P = BC.Q$$

zugleich erfüllt sein, woraus durch Ableitung folgt

$$(1)\ Q = R - P, \text{ und } (2)\ BC = \frac{AC.P}{R-P}.$$

So lange R $\gtrless$ P, sind beide Werthe möglich und auch vollkommen bestimmt; ist aber R = P, so wird BC = ∞, d. h. unmöglich, und die beiden Kräfte haben in diesem Falle keine Resultante.

§ 35. Erkl. Zwei antiparallele Kräfte, welche keine Resultante haben, heißen ein Kräftepaar, wovon das nächste Kapitel handelt.

§ 36. Erkl. Um die bisherigen Resultate auf beliebig viele parallele Kräfte auszudehnen und unter den allgemeinen Gesichtspunkt der Rechnung zu bringen, ist es nothwendig, den Kräften analog den Zahlen Vorzeichen beizulegen. Ist (Fig. 12)

P und Q positiv, so ist R negativ. Aehnlich verhält es sich mit den Momenten derselben. Denn ist

$$AC.P = BC.Q$$

so folgt entweder

$$-AC.P + BC.Q = o, \text{ oder } AC.P - BC.Q = o,$$

d. h. nimmt man die eine Strecke positiv, so ist die andere negativ, weil beide Kräfte dasselbe Vorzeichen haben. Nehmen wir daher vom Punkte C ausgehend, BC die Strecke rechter Hand positiv, so ist jedesmal AC d. h. die Strecke linker Hand negativ zu nehmen. Mit diesen Bestimmungen läßt sich in allen Fällen das Vorzeichen des Momentes mit Sicherheit angeben und auf diese Weise die Summe der Kräfte und ihrer Momente algebraisch herstellen.

In Beziehung auf Punkt A sind die Strecken AC und AB positiv; dagegen BC und BA in Beziehung auf B negativ. Wenn wir $P + P_1 + P_2 + \ldots.$ die algebraische Summe der Kräfte heißen, so soll damit gesagt sein, daß die Kräfte sowohl positiv als negativ sein können, im Uebrigen aber wie Zahlen addirt werden.

§ 37. Folgerung. Reduziren wir die Gleichungen des § 30 auf Null, so haben wir in Rücksicht auf vorstehende Bestimmungen

$$(1)\ -R + P + Q = o;\ (2)\ -AC.P + BC.Q = o$$

$$(3)\ AB.Q - AC.R = o;\ (4)\ -AB.P + BC.R = o$$

d. h. halten sich drei parallele Kräfte an einer Geraden Gleichgewicht, so ist die algebraische Summe sowohl der Kräfte, als auch ihrer Momente in Beziehung auf jeden der drei Angriffspunkte gleich Null.

§ 38. Lehrs. Halten sich drei parallele Kräfte an einer Geraden Gleichgewicht, so ist in Beziehung auf jeden Punkt dieser Geraden die algebraische Summe sowohl der Kräfte als Momente gleich Null.

Bew. Daß die algebraische Summe der Kräfte $= o$ ist, folgt aus dem vorigen §; desgleichen ist

$$-AC.P + BC.Q = o.$$

Ist nun (Fig. 12) O ein beliebiger Punkt auf AB, so folgt aus der Figur

$$AC = OC - OA, \text{ und } BC = OB - OC;$$

mithin durch Substitution dieser Werthe

$$-(OC - OA)P + (OB - OC)Q = o; \text{ oder}$$
$$-OC.P + OA.P + OB.Q - OC.Q = o; \text{ oder}$$
$$OA.P + OB.Q - OC(P + Q) = o; \text{ oder}$$
$$OA.P + OB.Q - OC.R = o,$$

was zu beweisen war.

§ 39. Zus. Stellen wir die Resultate des vor. § in der früheren Form

$$(1)\ R = P + Q;\ (2)\ OC.R = OA.P + OB.Q,$$
$$(3)\ Q = R - P;\ (4)\ OB.Q = OC.R - OA.P$$

dar, so heißt das, vom Gesichtspunkte der algebraischen Summe aus betrachtet:

Zwei parallele Kräfte an einer Geraden lassen sich stets durch eine Einzelkraft gleich ihrer algebraischen Summe, und die Summe ihrer Momente durch das Moment ihrer Resultante, auf denselben Punkt O bezogen, ersetzen.

§ 40. Lehrs. Die Resultante beliebig vieler paralleler Kräfte an einer Geraden ist gleich der algebraischen Summe der gegebenen Kräfte; dieselbe hat ein Moment gleich der algebraischen Summe der gegebenen Momente, auf denselben Punkt O der Geraden bezogen; d. h. es ist

$$(1)\ R = P + P_1 + P_2 + \ldots + P_n$$
$$(2)\ xR = aP + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n,$$

wenn wir mit a die Entfernung der Kräfte und mit x die Entfernung der Resultante vom Punkte O bezeichnen.

Bew. Ersetzen wir nach dem vorigen § je zwei Kräfte der Reihe nach durch ihre Resultante R_1, R_2, R_3 . . . . ., so haben wir die leicht verständlichen Gleichungen

$$\begin{aligned}
R_1 &= P + P_1 \\
R_2 &= R_1 + P_2 \\
R_3 &= R_2 + P_3 \\
&\vdots \\
R &= R_{n-1} + P_n
\end{aligned}$$

Daraus folgt durch Addition

$$R = P + P_1 + P_2 + \ldots . + P_n.$$

Bezeichnen wir die Entfernungen der Hülfskräfte $R_1, R_2 \ldots .$ beziehungsweise mit x_1, x_2 u. s. w., so haben wir

$$\begin{aligned}
x_1 R_1 &= aP + a_1 P_1 \\
x_2 R_2 &= x_1 R_1 + a_2 P_2 \\
x_3 R_3 &= x_2 R_2 + a_3 P_3 \\
&\vdots \\
x.R &= x_{n-1} R_{n-1} + a_n P_n;
\end{aligned}$$

oder durch Addition

$$x.R = aP + a_1 P_1 + a_2 P_2 + \ldots . + a_n P_n.$$

§ 41. Zus. Wird $R = 0$ so haben die Kräfte keine Resultante; ist aber R nicht gleich Null, wie z. B. wenn alle Kräfte in gleichem Sinne parallel sind, so haben die Kräfte eine Resultante, welche der Größe und Richtung nach durch Gl. (1) bestimmt ist, und in einem Punkte angreift, der von O die Entfernung $= x$ hat, welcher Werth aus (2) bestimmt wird.

§ 42. Lehrs. Die Momentengleichung (2) in § 40 bleibt ungestört, wenn statt der Entfernungen der Angriffspunkte vom Punkte O ihre Projektionen auf eine beliebige Gerade eingeführt werden.

Bew. Ziehen wir (Fig. 12) die willkürliche Gerade OF und fällen aus A, C, B Senkrechte auf OF und setzen $\angle BOF = \alpha$, so ist

$$OA \cos\alpha = OD;\ OC \cos\alpha = OE;\ OB \cos\alpha = OF;$$

andrerseits ist nach der Voraussetzung

$$OC.R = OA.P + OB.Q;$$ oder auch

$$OC \cos\alpha.R = OA \cos\alpha.P + OB \cos\alpha.Q;$$

mithin durch Substitution der vorigen Werthe

$$OE.R = OD.P + OF.Q.$$

Dieser Schluß läßt sich auf beliebig viele Kräfte ausdehnen, und ist auch dann noch giltig, wenn die Gerade OF nicht mehr durch O geht.

§ 43. Lehrs. Kräfte, welche in demselben Sinne parallel an einem beliebigen Punktesystem wirken, haben unter allen Umständen eine Resultante gleich ihrer Summe, und einen Kräftemittelpunkt.

Bew. Liegen die Angriffspunkte im Raume, so lassen sich alle in ein und dieselbe Ebene verlegen. Seien nun P, P_1, P_2, P_3 parallele Kräfte, deren Angriffspunkte A, B, C, D in einer Ebene liegen, welche dem System angehört, so lassen sich P und P_1 durch ihre Mittelkraft R_1 im Punkte O_1, ebenso R_1 und P_2 durch ihre Mittelkraft R_2 im Punkte O_2, endlich R_2 und P_3 durch R im Punkte O ersetzen.

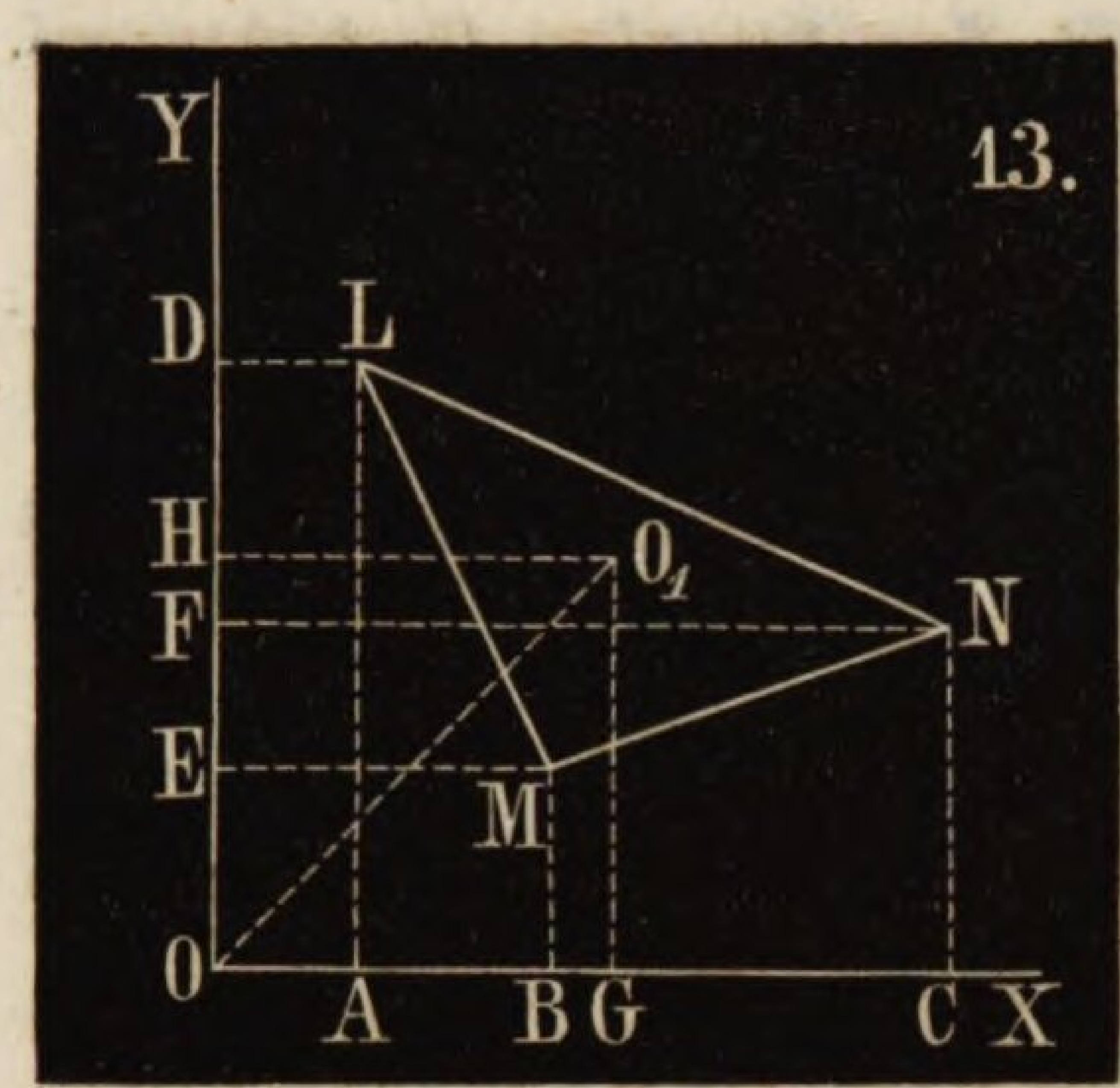
Demnach ist O Kräftemittelpunkt und

$$R_1 = P + P_1;\ R_2 = R_1 + P_2;\ R = R_2 + P_3;\ \text{mithin}$$
$$R = P + P_1 + P_2 + P_3.$$

Diese Zusammensetzung läßt sich unbeschränkt auf noch so viele Kräfte ausdehnen.

§ 44. Zus. Sind unter den parallelen Kräften auch antiparallele mitbegriffen, so haben die ersteren eine Resultante P (nach Lehrsatz) und die letzteren ebenfalls eine Resultante Q unter sich. In diesem Falle ist das ganze System auf zwei Kräfte P und Q reduzirt, welche antiparallel sind und in dem einzigen Falle keine Resultaute haben, wenn (§ 34) $P = Q$ ist, ohne daß ihre Angriffspunkte zusammenfallen. In jedem andern Falle hat das System eine Resultante $R = P - Q$ d. i. gleich der algebraischen Summe der gegebenen Kräfte.

§ 45. Lehrs. Das Moment der Resultante eines Systems irgendwie paralleler Kräfte ist gleich der algebraischen Summe der gegebenen Momente, oder ihrer Projektionen auf eine beliebige Gerade.



Bew. Seien (Fig. 13) P, P_1, P_2 drei parallele Kräfte, deren Angriffspunkte L, M, N in der Ebene LMN liegen, R ihre Resultante, O_1 ihr Angriffspunkt, OX eine beliebige Gerade und O ein beliebiger Punkt auf ihr. Ziehen wir nun aus den Angriffspunkten Senkrechte auf OX, so lassen sich nach § 42 die einzelnen Momente in Beziehung auf O durch die Projektionen OA, OB, OC, OG gerade so ausdrücken, als wenn die 4 Kräfte in den Punkten A, B, G, C der Geraden OX angriffen. Für diesen letzteren Fall wurde aber in § 40 ganz allgemein bewiesen, daß für beliebig viele, irgendwie parallele Kräfte das Moment der Resultante gleich ist der algebraischen Summe der Componenten-Momente. In Rücksicht darauf haben wir daher

$$OG.R = OA.P + OB.P_1 + OC.P_2.$$

Sind mehr als drei Kräfte gegeben, deren Angriffspunkte beliebig im Raume liegen, so kann man die Angriffspnnkte entweder in die Ebene LMN verlegen, oder die Entfernungen vom Punkte O direkt auf OX projiziren und § 40 in Anwendung bringen.

Die Richtung der Kräfte gegen die Ebene LMN ist dabei ganz gleichgiltig und man kann sie sowohl senkrecht darauf, als auch mit ihr zusammenfallend annehmen.

§ 46. Bestimmung des Kräftemittelpunktes durch Rechnung. Ziehen wir (Fig. 13) $OY \perp OX$ und $O_1H \perp OY$, so ist O_1 der Angriffspunkt der Resultante R vollkommen bestimmt, wenn die Strecken OG und OH bekannt sind. Denn es ist, wenn wir $\angle O_1OG = \alpha$ setzen

$$OO_1 = \sqrt{OG^2 + OH^2}; \text{ tang } \alpha = \frac{O_1G}{OG} = \frac{OH}{OG}.$$

Ziehen wir noch von den Angriffspunkten Senkrechte auf OY und setzen

$$OA = a,\ OB = a_1,\ OC = a_2 \text{ u. s. w.}$$

$$OD = b,\ OE = b_1,\ OF = b_2 \text{ u. s. w.}$$

sowie $OG = x$ und $OH = y$, so haben wir in Rücksicht auf die vorausgehenden §§ für beliebig viele parallele Kräfte

$$(1)\quad R = P + P_1 + {}_2 + \ldots + P_n$$

$$(2)\quad x.R = aP + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n$$

$$(3)\quad y.R = bP + b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots + b_nP_n$$

Hieraus folgt

$$(4)\quad x = \frac{aP + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n}{P + P_1 + P_2 + \ldots + P_n}$$

$$(5)\quad y = \frac{bP + b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots + b_nP_n}{P + P_1 + P_2 + \ldots + P_n};\ \text{mithin}$$

$$(6)\quad OO_1 = \sqrt{x^2 + y^2};\quad (7)\quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{y}{x}.$$

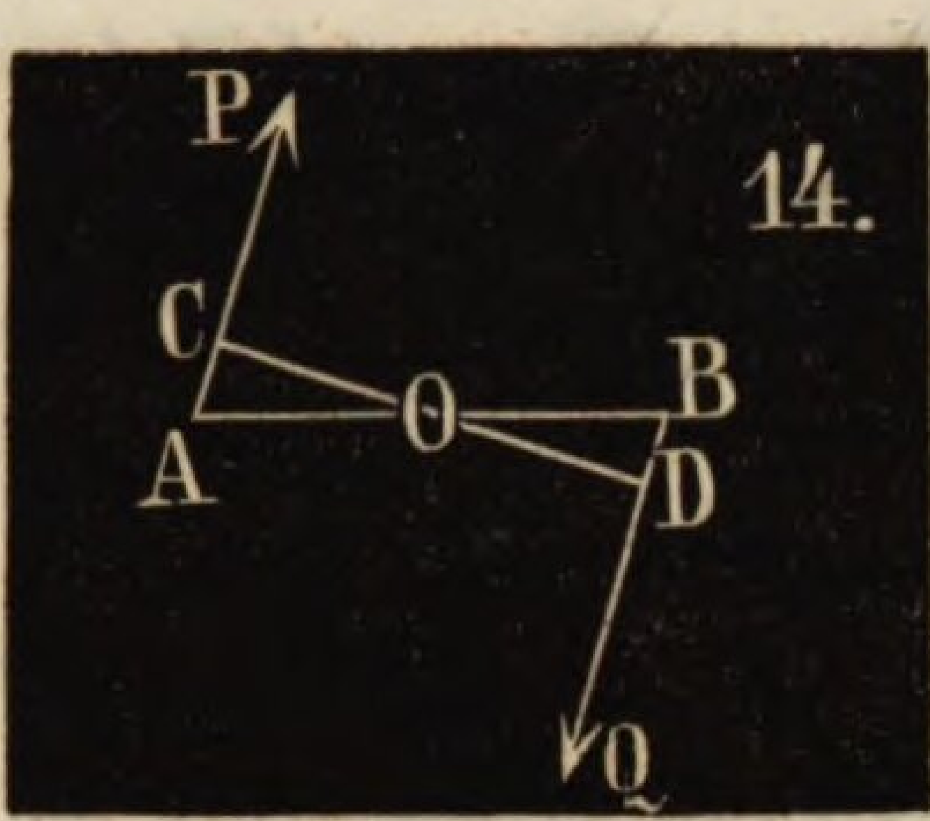
Dadurch ist die Lage von O_1 vollkommen bestimmt. Wären die Angriffspunkte nicht in einer Ebene gelegen, so läge O_1 im Raume, und es wäre in diesem Falle die senkrechte Entfernung dieses Punktes von der Ebene LMN zur vollständigen Bestimmung erforderlich. Zugleich geben vorstehende Gleichungen auch darüber Aufschluß, ob das System eine Resultante hat oder nicht.

Drittes Capitel.

Von den Kräftepaaren.

§ 47. Erkl. Bilden die Richtungen der Kräfte eines Paares mit der Geraden der Angriffspunkte einen rechten Winkel, so heißt das Kräftepaar rechtwinkelig, außerdem schiefwinkelig.

§ 48. Lehrs. Jedes schiefwinkelige Kräftepaar läßt sich durch ein rechtwinkeliges ersetzen.



14.

Bew. Greifen (Fig. 14) die gleichen und antiparallelen Kräfte ($P = Q$) in den Punkten A und B an und ziehen wir durch den Mittelpunkt O von AB auf die Richtungen der Kräfte eine Senkrechte CD, so lassen sich nach § 10 die Angriffspunkte nach C und D verlegen, ohne die Wirkung der Kräfte zu ändern; folglich kann das gegebene Kräftepaar durch das in CD wirkende rechtwinkelige Paar ersetzt werden.

In der Folge heißt CD der Arm, das Produkt $CD.P$ das Moment und O der Mittelpunkt des Kräftepaares.

§ 49. Lehrs. Die Wirksamkeit eines Kräftepaares ist durch sein Moment ausgedrückt.

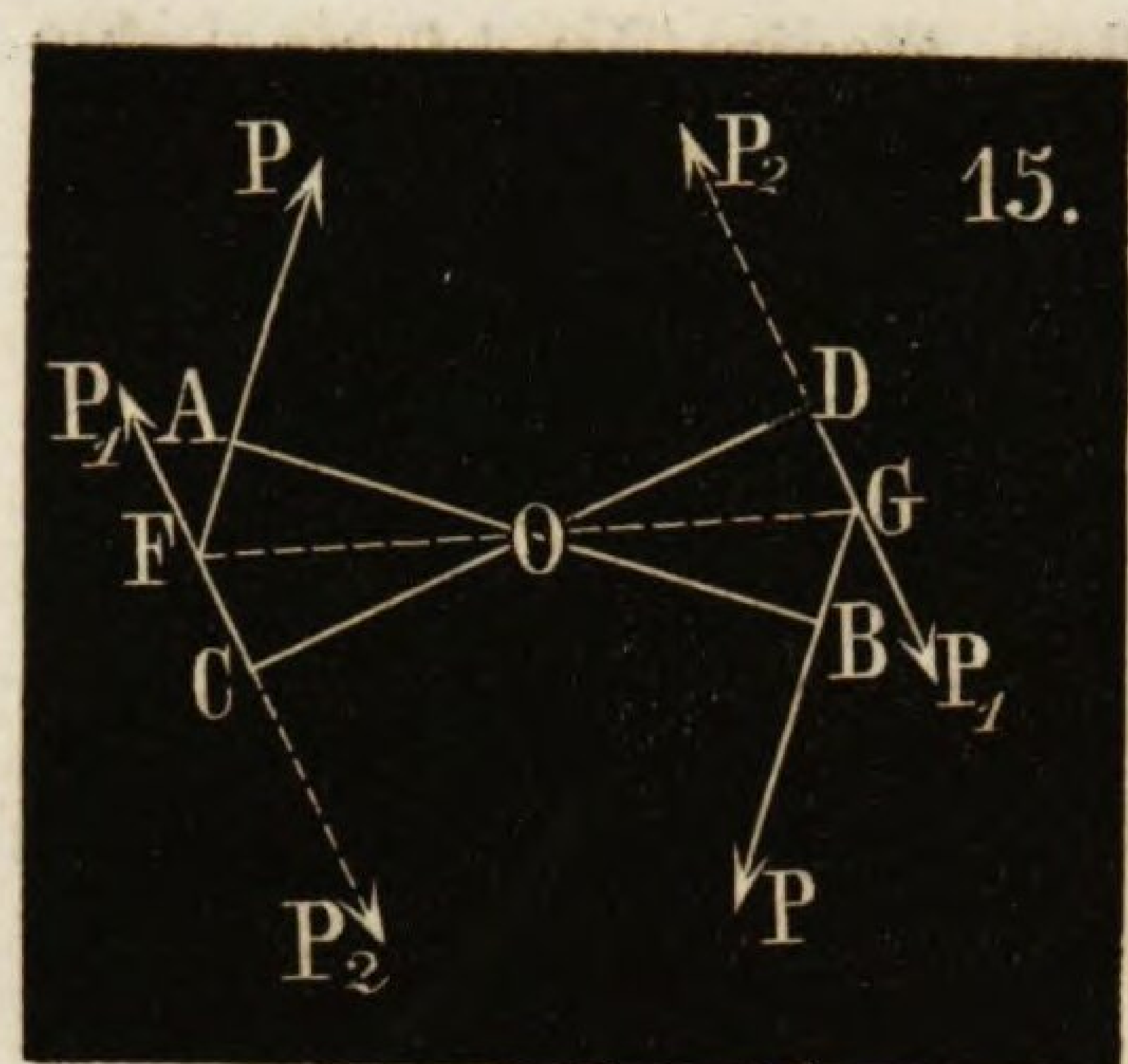
Denn da beide Kräfte das System CD (Fig. 14) um den Mittelpunkt O zu drehen streben, so kann man sich den Punkt O auch fest vorstellen. In Beziehung auf diesen Punkt hat aber P ein Moment $= OC.P$, und Q ein Moment $= OD.Q$. Weil aber $P = Q$ und beide Momente in demselben Sinne wirken, so ist das Moment aus beiden Kräften gleich ihrer Summe, also

$$= OC.P + OD.Q = (OC + OD)\,P = CD.P.$$

§ 50. Zus. Es fällt in die Augen, daß es bei jedem Kräftepaar außer seinem Momente auch noch auf die Drehungsrichtung ankommt und daß es nur rechts- und linksdrehende Paare geben kann. Da die einen den andern direkt entgegengesetzt sind, so genügt es analog § 38 die einen als positiv, die andern als negativ in Rechnung zu bringen.

§ 51. Lehrs. Ein Kräftepaar läßt sich um seinen Mittelpunkt um einen beliebigen Winkel drehen, ohne seine Wirkung zu ändern.

Bew. Sei (Fig. 15) $AB.P$ das gegebene Paar. Legen wir durch den Mittelpunkt O einen zweiten Arm $CD = AB$ und bringen in C und D zwei neue und gleiche Kräfte $P_1 = P_2 = P$



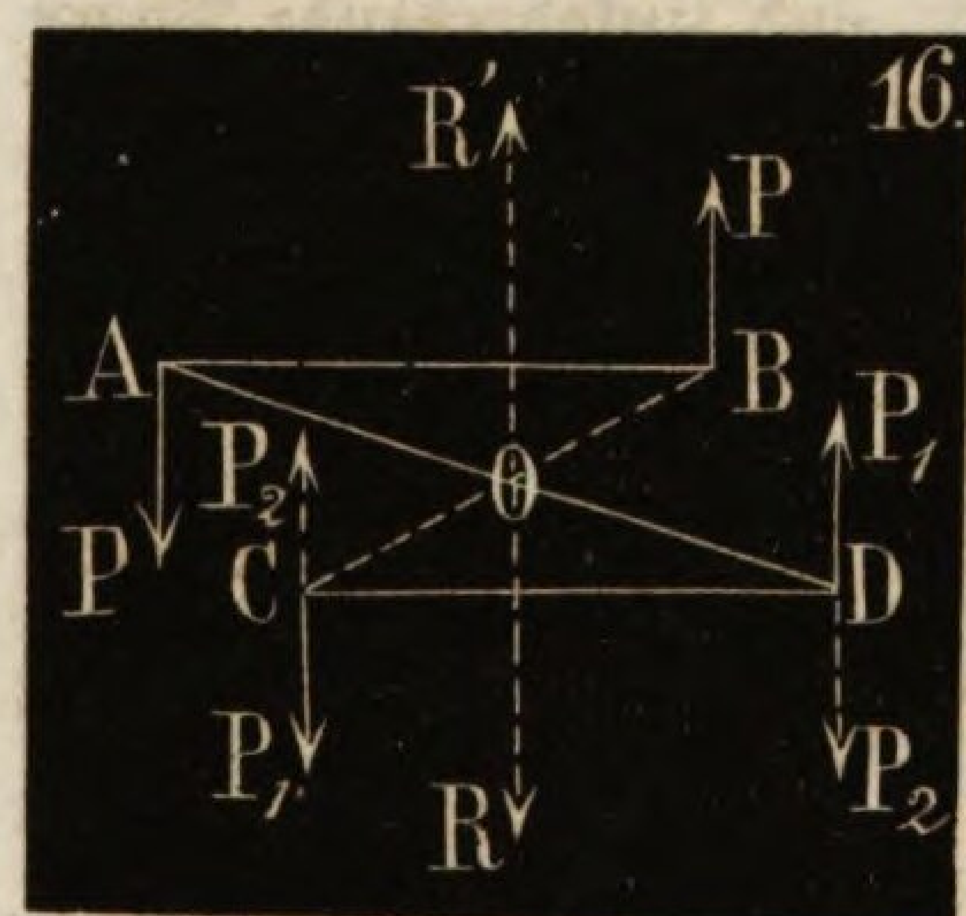
senkrecht auf CD an, so heben sich P_1 und P_2 sowohl in C als in D auf und ändern das gegebene Paar nicht. Denken wir uns andrerseits die Kraft P und P_2 nach ihren Schnittpunkten F und G verlegt, so haben sie, wie leicht einzusehen ist, je eine Resultante in der Richtung FO und GO, welche sich nothwendig aufheben, weil sie gleich und entgegengesetzt sind, und wir haben P_1 am Arme CD allein wirksam. Weil aber durch Einführung der zwei Hülfspaare das gegebene Paar in seiner Wirkung nicht gestört wird, so muß es einerlei sein, entweder das gegebene oder das übrig gebliebene Paar wirken zu lassen; mithin ist

$$AB.P = CD.P_1 = CD.P,$$

welche Lage CD gegen AB auch haben mag.

Zus. Haben zwei Kräftepaare gleiches Moment und denselben Mittelpunkt, so ist ihre Gesammtwirkung entweder gleich dem doppelten Momente eines jeden, oder gleich Null, je nachdem beide in gleichem oder entgegengesetztem Sinne drehend sind.

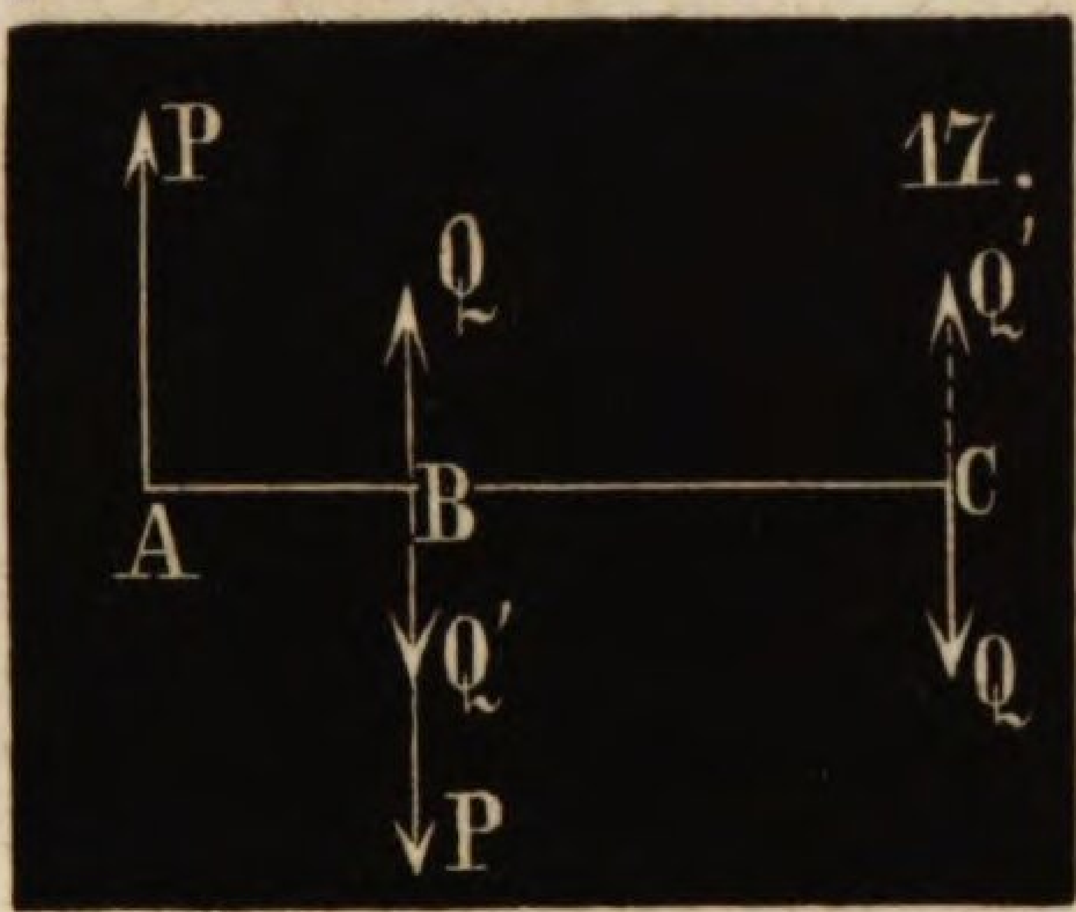
§ 52. Lehrs. Ein Kräftepaar darf ohne Aenderung seiner Wirkungsweise parallel zu sich selbst verschoben werden.



Bew. Es sei (Fig. 16) CD = und $\#$AB, und die in C und D senkrecht auf CD angebrachten Hülfskräfte $P_1 = P_2 = P$, außerdem A mit D und B mit C starr verbunden, so heben sich die eingeführten neuen Kräfte gegenseitig auf und ändern die Wirkung des gegebenen Paares AB.P nicht. Andrerseits lassen sich die in A und D wirkenden Kräfte P und P_2 durch ihre Resultante $R = P + P_2$ im Mittelpunkt O ersetzen; desgleichen die beiden in B und C wirkenden P und P_2 durch

ihre Resultante $R' = P + P_2$ in demselben Punkte O. Die Kräfte R und R' heben sich aber auf; mithin bleibt nur die Kraft P_1 an dem Arm CD allein wirksam. Durch diese zweite Combination wird aber die erste, daß nämlich das Moment AB.P in seiner Wirkung ungestört bleibt, nicht aufgehoben; folglich ist es einerlei, entweder das Moment AB.P oder $CD.P_1$ sich thätig vorzustellen; also kann eins das andere ersetzen.

§ 53. Lehrs. Haben zwei Kräftepaare *parallele*, aber *ungleiche* Arme, so kann eins das andere ersetzen, wenn ihre Momente der Größe und Richtung nach gleich sind.



Bew. Ist AB.P = BC.Q gegeben, so lassen sich beide Momente, weil ihre Arme # sind, so verschieben, daß ihre Arme in eine Gerade AC (Fig. 17) fallen. Bringen wir in B und C die Kraft Q' = Q in entgegengesetzter Richtung von Q an, so heben sich in B und C die Kräfte Q und Q' gegenseitig auf, so daß das Moment AB.P allein wirksam bleibt. Andrerseits haben aber die in A und C wirkenden Kräfte P und Q' eine Resultante $R = P + Q'$, welche nach § 26 in B angreift, indem der Voraussetzung zufolge

$$P : Q' = BC : AC$$

stattfindet. Dieser Kraft R wirkt in B eine andere Kraft $R' = P + Q'$ entgegen, und wird daher von ihr wirkungslos gemacht, so daß das Moment BC.Q allein wirksam bleibt. Demnach läßt sich das neu eingeführte Moment BC.Q' sowohl durch BC.Q, als auch durch AB.P aufheben; folglich bringen beide gleiche Wirkungen hervor d. h. sie können sich gegenseitig ersetzen.

§ 54. Zusammensetzung der Kräftepaare. Lehrsatz. Alle an einem starren Punktesystem thätigen Kräftepaare lassen sich auf ein einziges zurückführen.

Bew. Nach dem Vorgetragenen können wir

1) alle Paare als rechtwinkelig voraussetzen;

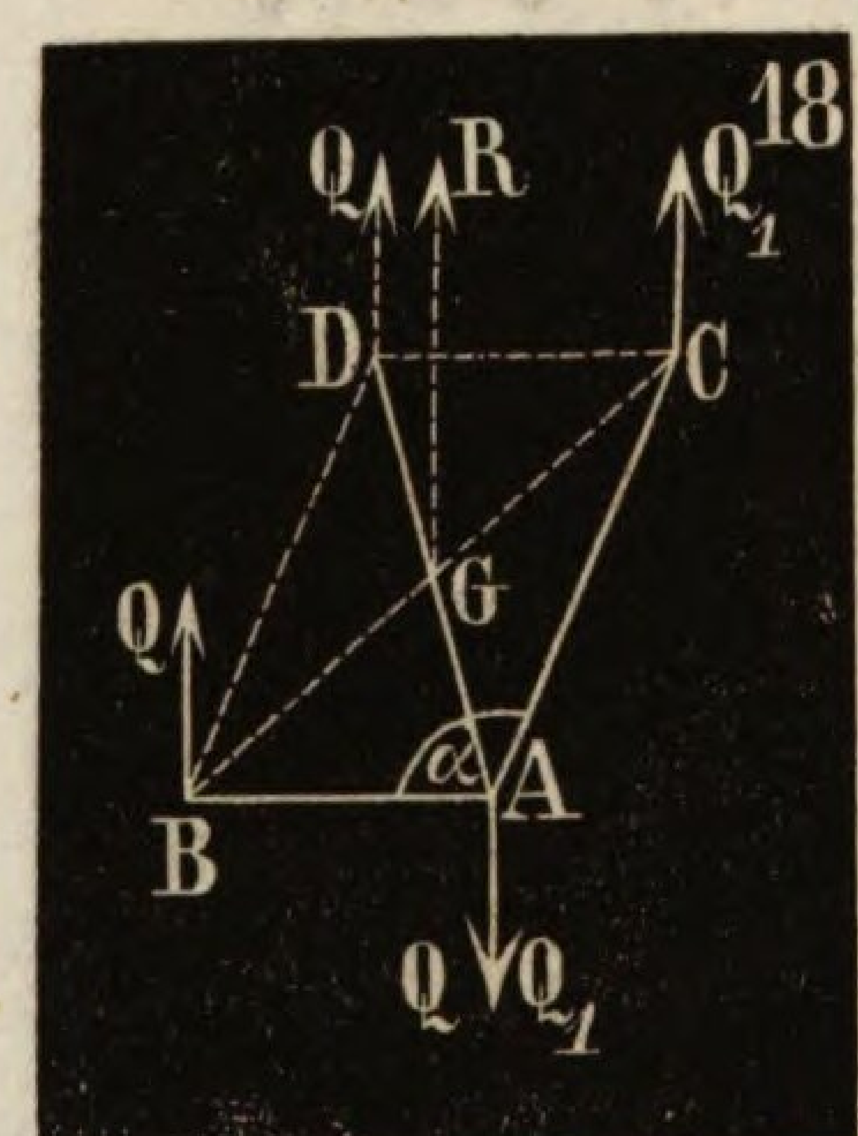
2) jedes Paar um seinen Mittelpunkt drehen, bis die Richtungen aller Kräfte in parallele Gerade fallen;

3) jedes Paar parallel zu sich selbst verschieben, bis alle Arme in einer Ebene liegen.

Nun werden die Arme in diesem Zustande einander parallel sein oder auch nicht.

I. Alle jene Arme, welche ⫲ sind, lassen sich wiederum verschieben, bis sie in der nämlichen Geraden liegen und ihre Mittelpunkte in einem Punkt O zusammenfallen. Endlich können nach § 53 alle Paare auf den Arm AB reduzirt werden, so daß alle Kräfte nur in den zwei Punkten A und B thätig sind. Haben nun die Kräfte in A eine Resultante $= R$, so haben jene in B dieselbe Resultante der Größe nach und antiparallel der Richtung nach; und es ist somit das ganze System auf ein einziges Kräftepaar zurückgeführt, dessen Moment $= AB.R$ ist.

II. Die nicht parallelen Arme lassen sich so lange ⫲ zu sich selbst verschieben, bis alle einen Angriffspunkt A gemein haben; hierauf läßt sich jedes Paar nach § 53 so reduziren, daß alle Paare gleiche Kräfte haben. Gebrauchen wir bei der Verschiebung noch die Vorsicht, daß nur solche Punkte in A sich vereinigen, deren Kräfte nach derselben Seite hin wirken, so veranschaulicht Fig. 18 eine Zusammensetzung der Paare AB.Q und $AC.Q_1$, welche sowohl für rechts- als linksdrehende Paare giltig ist. Nun haben die Kräfte in A eine Resultante $R = Q + Q_1 = 2Q$; desgleichen die in B und C angreifenden eine Resultante $R = Q + Q_1$, welche in G der Mitte von BC angreift. Wir haben demnach in A und G zwei gleiche und antiparallele Kräfte wirksam, also ein einziges Kräftepaar $= AG.R = AG.2Q = 2AG.Q$ statt der zwei gegebenen Paare. Auf dieselbe Weise läßt sich dieses letztere Paar mit einem dritten zu einem einzigen Paare vereinigen, und



dieses Verfahren so lange fortsetzen, bis alle Paare auf ein einziges zurückgeführt sind.

Es ist somit in allen Fällen möglich, die gegebenen Paare auf ein einziges zu reduziren.

§ 55. Die Resultate der vorigen Betrachtung lassen sich auch durch Rechnung feststellen.

I. Für parallele Arme. Bezeichnen wir analog § 46 die gegebenen Kräfte mit $P, P_1, P_2 \ldots$, deren Arme mit $a, a_1, a_2 \ldots$, die reduzirten Kräfte mit $Q, Q_1, Q_2 \ldots$ und setzen den gemeinschaftlichen Arm $AB = b$, so haben wir

$$b.Q = a.P;\ b.Q_1 = a_1.P_1;\ b.Q_2 = a_2.P_2 \text{ u. s. w. oder}$$

$$Q = \frac{aP}{b};\quad Q_1 = \frac{a_1P_1}{b};\quad Q_2 = \frac{a_2P_2}{b} \text{ u. s. w.}$$

Ist auf diese Weise die Größe der reduzirten Kräfte gefunden, so ist ihre Resultante in den Punkten A und B gleich ihrer algebraischen Summe; also

$$R = Q + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n, \text{ oder}$$

$$R = \frac{aP + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n}{b}; \text{ oder auch}$$

(1) $b.R = aP + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n$

d. h. das Moment der Resultante am Arme AB ist gleich der algebraischen Summe der gegebenen Momente, auf ein und denselben Punkt O bezogen.

II. Sind die Arme nicht parallel, so haben wir alle Kräfte auf die Größe Q zu reduziren und den entsprechenden Arm b zu bestimmen. Wir haben daher

$$b.Q = aP;\ b_1.Q = a_1P_1;\ b_2.Q = a_2P_2 \text{ u. s. w.}$$

$$b = \frac{aP}{Q};\quad b_1 = \frac{a_1P_1}{Q};\quad b_2 = \frac{a_2P_2}{Q} \text{ u. s. w.}$$

Um nun (Fig. 18) das resultirende Moment 2AG.Q zu bestimmen, sei $BD \# AC$ und $CD \# AB$; dann ist $2AG = AD$; folglich

$$2AG.Q = AD.Q.$$

Setzen wir $\angle CAB = \alpha$, so ist AD durch

$$AD^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB.AC \cos \alpha$$

und somit auch AD.Q bestimmt. Der Arm AD wird demnach gerade so bestimmt, als wären die Linien AB und AC zwei unter dem Winkel α wirkende Kräfte. Umgekehrt kann das Moment AD.Q in die Momente AB.Q und AC.Q gerade so zerlegt werden, wie eine Kraft in seine Componenten. Aus diesem Grunde ist es für die Rechnung vortheilhafter, analog § 24 die reduzirten Arme sämmtlich auf zwei senkrechte Richtungen zu projiziren und aus der algebraischen Summe der Projektionen das resultirende Kräftepaar abzuleiten, wie es in § 21 auseinandergesetzt wurde. Bezeichnen wir wie dort mit X und Y die algebraische Summe aus den Projektionen und mit $\alpha, \beta, \gamma \ldots.$ die Richtungswinkel der Arme, so ist schließlich

$$X = b \cos \alpha + b_1 \cos \beta + b_2 \cos \gamma + \ldots.$$
$$= \frac{aP \cos \alpha + a_1 P_1 \cos \beta + a_2 P_2 \cos \gamma + \ldots.}{Q}$$

$$Y = b \sin \alpha + b_1 \sin \beta + b_2 \sin \gamma + \ldots.$$
$$= \frac{aP \sin \alpha + a_1 P_1 \sin \beta + a_2 P_2 \sin \gamma + \ldots.}{Q}$$

woraus als resultirendes Paar folgt

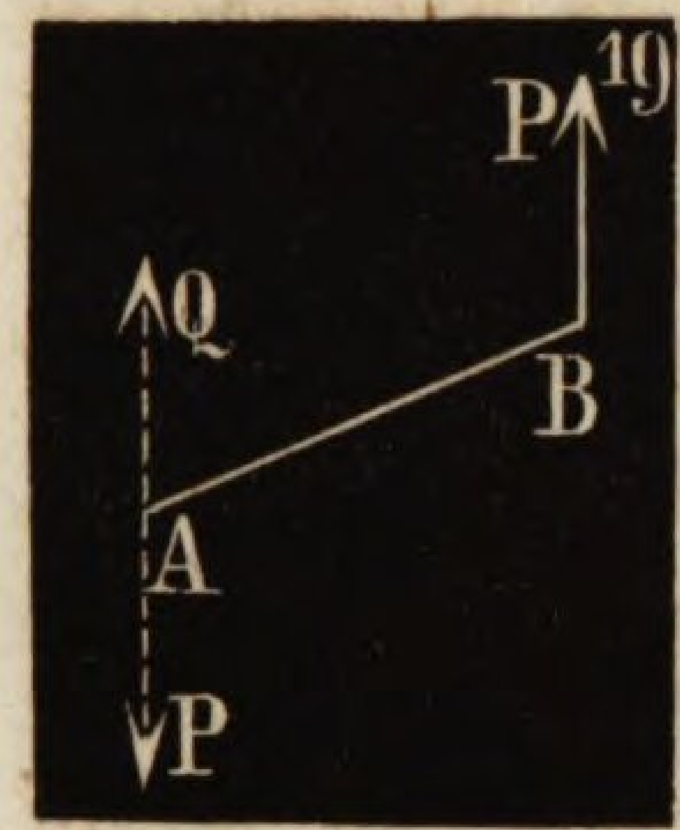
$$(2)\quad Q \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

§ 56. Gleichgewichtsbedingungen für Kräftepaare. Sind die gegebenen Kräftepaare im Gleichgewicht, so folgt aus dem vor. § für parallele Arme wegen $R = 0$, daß die algebraische Summe der reduzirten Kräfte Q, oder die algebraische Summe der Momente aP gleich Null sein muß. Sind die Arme nicht $\nparallel$, so folgt aus (2), da Q als willkürliche Größe nicht Null sein kann, daß X und Y d. h. die algebraische Summe aus den Projektionen der Arme auf zwei senkrechte Gerade zugleich Null sein muß.

Viertes Capitel.

Gleichgewichtsbedingungen für ein freies starres System von Punkten.

§ 57. Allgemeine Reduktion der Kräfte. Lehrsatz. Alle Kräfte, welche ein festverbundenes System von Punkten irgend wie angreifen, lassen sich auf eine Einzelkraft und ein Kräftepaar zurückführen.



Bew. Die Wirkung der Kraft P, welche (Fig. 19) den Punkt B angreift, wird nicht geändert, wenn in einem beliebigen Punkte A, der übrigens mit B fest verbunden sein muß, zwei neue Kräfte anbringen, welche = P und sich entgegengesetzt sind. Andrerseits können wir uns auch vorstellen, in A wirke eine Einzelkraft P und am Arme AB ein Kräftepaar = AB.P. So wie P kann aber jede der gegebenen Kräfte durch eine Einzelkraft in A und ein Kräftepaar ersetzt werden, dessen Arm mit A verbunden ist. Auf diese Weise erhalten wir ebensowiele Kräfte an einem Punkte A und Kräftepaare, als Kräfte gegeben sind. Alle Kräfte in A lassen sich nach § 22 auf eine einzige Kraft R, und alle Kräftepaare nach § 54 auf ein einziges Paar = a.Q reduziren. Da nun die Einzelkraft R das Moment a.Q nicht aufheben kann, so bestehen im Allgemeinen die Bedingungen des Gleichgewichts für ein starres System darin, daß die Kraft R und das Moment a.Q zugleich verschwinden.

§ 58. Gleichgewicht paralleler Kräfte in einer Ebene.

Lehrs. Zum Gleichgewichte paralleler Kräfte, welche in ein und derselben Ebene an einem freien Systeme fest verbundener Punkte wirken ist es nothwendig und hinreichend, daß

1) die algebraische Summe der Kräfte und
2) die algebraische Summe ihrer Momente in Beziehung auf irgend einen Punkt derselben Ebene verschwindet.

Bew. Ziehen wir von dem beliebigen Punkt O eine Gerade senkrecht zur Richtung der parallelen Kräfte, so können wir alle Angriffspunkte in die Gerade verlegen, und wir haben parallele Kräfte an einer Geraden, wofür wir in § 40 folgende zwei Gleichungen aufgestellt haben

(1) $R = P + P_1 + P_2 + \dots + P_n$

(2) $x.R = aP + a_1P_1 + a_2P_2 + \dots + a_nP_n$

Sollen nun die Kräfte im Gleichgewicht sein, so muß sowohl R, als auch ihr Moment x.R Null werden, was mit dem Wortlaut des Lehrsatzes übereinstimmt.

§ 59. Zus. Sind die gegebenen Kräfte nicht im Gleichgewicht, aber so beschaffen, daß durch Einführung einer Einzelkraft Gleichgewicht hergestellt werden kann, so muß diese Kraft gleich und entgegengesetzt der Resultante R sein. Fügen wir daher zu den gegebenen Kräften die Kraft — R, so müssen dem Lehrsatz zufolge die zwei Gleichungen

(1) $-R + P + P_1 + P_2 + \dots + P_n = 0$

(2) $-x.R + aP + a_1P_1 + a_2P_2 + \dots + a_nP_n = 0$

zugleich erfüllt sein; außerdem kann das System nicht durch eine Einzelkraft, sondern nur durch ein Kräftepaar (§ 57) ins Gleichgewicht gebracht werden. Dieses wäre der Fall, wenn die algebraische Summe der Kräfte, nicht aber die der Momente Null würde. In diesem Falle müßte nämlich aus (2) $x = \infty$ werden (vergl. § 34).

§ 60. Lehrs. Wird ein ebenes Punktesystem von irgendwie parallelen Kräften angegriffen, so ist zum Gleichgewichte erforderlich und hinreichend, daß

1) die algebraische Summe der Kräfte;
2) die algebraische Summe ihrer Momente, auf zwei senkrechte Gerade projizirt, zugleich verschwindet.

Bew. Nehmen wir an, die gegebenen Kräfte haben eine Resultante R, so haben wir nach § 46 die Bedingungsgleichungen

$$(1)\quad R = P + P_1 + P_2 + \ldots + P_n$$
$$(2)\quad xR = aP + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n$$
$$(3)\quad yR = bP + b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots + b_nP_n$$

Weil aber die Kräfte im Gleichgewichte sein sollen, so muß sowohl R, als auch xR und yR Null werden, was dasselbe bedeutet, als der Lehrsatz behauptet.

§ 61. Zus. Sind die Kräfte nicht im Gleichgewicht und es kann durch eine Einzelkraft Gleichgewicht hergestellt werden, so müssen wie in § 59 die drei Gleichungen

$$(1)\quad -R + P + P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 0$$
$$(2)\quad -xR + aP + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n = 0$$
$$(3)\quad -yR + bP + b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots + b_nP_n = 0$$

zugleich erfüllt sein. Wäre insbesondere R = 0 und hätte eine oder beide Summen in (2) und (3) einen endlichen von Null verschiedenen Werth = m, so wäre

$$x = \frac{m}{0} = \infty, \text{ d. h.}$$

das System könnte durch eine Einzelkraft nicht ins Gleichgewicht gebracht werden, sondern nur durch ein Kräftepaar, dessen Moment aus (2) und (3) resultirt.

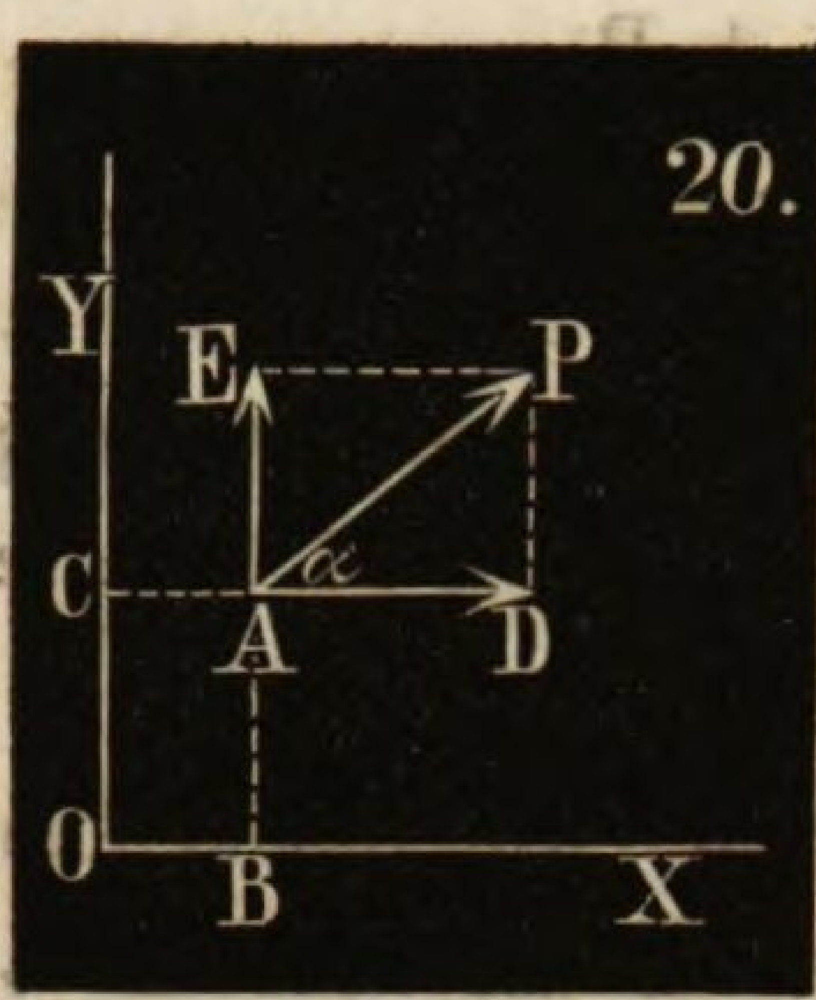
Anm. Die Resultate des § 60 und 61 bleiben auch noch giltig, wenn die Angriffspunkte nicht mehr in einer Ebene liegen.

§ 62. Gleichgewichtsbedingungen für beliebige Kräfte in einer Ebene. Lehrsatz.

Zum Gleichgewichte beliebiger Kräfte in einer Ebene ist es erforderlich und hinreichend, daß

1) die algebraische Summe ihrer Projektionen auf zwei senkrechte Gerade OX und OY;
2) das resultirende Kräftepaar aus den auf OX und OY projizirten Momenten in Beziehung auf den Schnittpunkt O zugleich verschwindet.

Bew. Sei P (Fig. 20) eine beliebige Kraft in der Ebene XOY, α ihr Richtungswinkel mit OX, und A ihr Angriffspunkt, so können wir P in zwei rechtwinkelige Componenten P cos α,



$P \sin \alpha$ zerlegen und ihre Angriffspunkte nach C und B verlegen, und zugleich § 57 entsprechend in O vier gleiche und parallele Kräfte anbringen. Dadurch erhalten wir zwei Kräfte $P \cos \alpha$, $P \sin \alpha$ in O und zwei Kräftepaare nämlich $a.P \sin \alpha$ in OX und $b.P \cos \alpha$ in OY, wenn wir, wie bisher, $OB = a$ und $OC = b$ setzen. Diese zwei Paare sind sowohl in Fig. 20 als auch in jedem anderen Falle in ihren Wirkungen entgegengesetzt und überdieß so beschaffen, daß sie sich durch Drehen und Verschieben nach § 55, I auf das einzige Paar

$$aP \sin \alpha - bP \cos \alpha = P(a \sin \alpha - b \cos \alpha)$$

reduziren lassen. Wir haben demnach die Kraft P in A durch zwei Kräfte in O und ein Kräftepaar ersetzt.

Zerlegen wir die übrigen Kräfte, deren Richtungswinkel β, γ, δ ... sein mögen, auf dieselbe Art, so haben wir ebensoviele Kräfte in O parallel OX und OY wirkend, und Kräftepaare, als Kräfte gegeben sind. Nehmen wir einen Augenblick an, die Kräfte haben eine Resultante R, welche mit OX einen Winkel $= \varphi$ bildet, so haben wir nothwendig, wenn x und y analog § 46 den Angriffspunkt von R bezeichnen

$$(1)\quad R \cos \varphi = P \cos \alpha + P_1 \cos \beta + P_2 \cos \gamma + \dots = X$$

$$(2)\quad R \sin \varphi = P \sin \alpha + P_1 \sin \beta + P_2 \sin \gamma + \dots = Y$$

$$(3)\quad R(x \sin \varphi - y \cos \varphi) = P(a \sin \alpha - b \cos \alpha) + \\ + P_1(a_1 \sin \beta - b_1 \cos \beta) + P_2(a_2 \sin \gamma - b_2 \cos \gamma) + \dots = Z.$$

Weil aber der Voraussetzung zufolge das System im Gleichgewicht ist und $\sin \varphi$ nicht zugleich mit $\cos \varphi$ Null werden kann, so muß $R = 0$ und mithin auch

$$X = Y = Z = 0 \text{ sein.}$$

§ 63. Zus. Ist das System nicht im Gleichgewicht und es kann durch Einführung einer Einzelkraft Gleichgewicht hergestellt werden, so müssen analog § 61 durch Hinzufügen der

Kraft — R die vorigen 3 Gleichungen zugleich verschwinden. Um R der Größe nach zu bestimmen, haben wir aus (1) und (2)

$$(1)\ R = \sqrt{X^2 + Y^2};\ (2)\ \operatorname{tang} \varphi = \frac{Y}{X}.$$

Zur Bestimmung von x und y haben wir aus der vorhergehenden Entwickelung

$$(3)\ xR \sin \varphi = aP \sin \alpha + a_1 P_1 \sin \beta + a_2 P_2 \sin \gamma + \ldots = p$$

$$(4)\ yR \cos \varphi = bP \cos \alpha + b_1 P_1 \cos \beta + b_2 P_2 \cos \gamma + \ldots = q;$$

mithin

$$(5)\ x = \frac{p}{R \sin \varphi} = \frac{p}{Y};\ (6)\ y = \frac{q}{R \cos \varphi} = \frac{q}{X}.$$

Dadurch ist auch der Angriffspunkt der Resultante vollkommen bestimmt.

§ 64. Zus. Wären beliebige Kräfte im Raume gegeben, so hätten wir die Betrachtungen des § 62 auf drei Ebenen auszudehnen, also im Allgemeinen 12 Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten zu behandeln.

Fünftes Capitel.

Vom Schwerpunkt.

§ 65. Jeder sich selbst überlassene Körper fällt erfahrungsgemäß zu Boden in einer Richtung *), welche jedesmal dem Mittelpunkte der Erde zugekehrt ist. Die Ursache dieser Erscheinung ist die Anziehungskraft der Erde, welche Schwerkraft oder Schwere genannt wird. Diese Kraft ist so wesentlich mit der Materie eines jeden Körpers verbunden, daß sie durch nichts zerstört, wohl aber durch eine ihr gleiche Gegenkraft aufgehoben werden kann, wie dies im Zustande der Ruhe der Fall ist. Diese Kraft zieht nicht bloß den Körper überhaupt, sondern jedes

*) Diese Richtung heißt vertikal, die darauf senkrechte horizontal.

Massentheilchen desselben mit der gleichen Intensität an. In einem Körper, den wir uns aus n Massentheilchen bestehend vorstellen, sind auch n Kräfte thätig, deren Richtungen nach dem Mittelpunkte der Erde convergiren. Obwohl die Schwerkraft mit der Entfernung vom Mittelpunkte veränderlich wird, so ist doch die Erhebung unsres Spielraumes über die Erdoberfläche gegen den Erdradius so gering, daß wir an einem bestimmten Orte nicht bloß diese Kraft constant, sondern auch die Kraftrichtungen der einzelnen Massentheilchen ‡ betrachten dürfen. Weil nach § 43 n parallele Kräfte stets eine Mittelkraft haben, so können wir uns auch vorstellen, ein jeder Körper werde nur von einer Kraft angezogen, welche der Summe aller einzelnen Kräfte gleich und ihren Angriffspunkt im Mittelpunkt der parallelen Kräfte hat. Jede Kraft, welche einen Körper im Fallen hindert, muß dieser Mittelkraft gleich und entgegengesetzt sein.

Beim Aufhängen offenbart sich diese Kraft als Spannung, im Ruhen auf einer Unterlage als Druck. Ein jeder Körper kann nur einen solchen Punkt haben und dieser Punkt heißt Schwerpunkt des Körpers. Der Schwerpunkt eines Körpers ist daher nichts anderes, als der Angriffspunkt der Mittelkraft oder auch der Gegenkraft, durch welche der Körper in Ruhe erhalten wird. Da es nun einerlei ist, alle Einzelkräfte oder nur ihre Mittelkraft thätig zu denken, die Wirksamkeit dieser letzteren Kraft aber dieselbe bleibt, wenn wir alle Massentheilchen des Körpers in ihrem Angriffspunkt vereinigt denken, so folgt daraus, daß, solange nur die Schwere allein wirkt, jeder Körper als bloßer Punkt behandelt werden kann, dessen Masse in seinem Schwerpunkt verdichtet ist, vorausgesetzt, daß die Lage des Schwerpunktes jedesmal bestimmt werden kann.

Dieses Letztere erfordert in den meisten Fällen eine höhere Kenntniß der Mathematik; wir müssen uns deßwegen nur auf jene einfachen Fälle beschränken, welche unsere Hülfsmittel nicht übersteigen.

§ 66. Masse und Gewicht. Die Größe oder Intensität, mit welcher ein Körper von der Erde angezogen wird, heißt sein

Gewicht. Bezeichnen wir dasselbe mit G, die Masse des Körpers mit m, die der Erde mit M und den Erdradius mit r, so haben wir nach dem allgemeinen Anziehungsgesetze

$$G = \frac{m.M}{r^2}$$

als Ausdruck des Gewichtes eines Körpers.

Für einen zweiten Körper vom Gewichte g und Masse m_1 haben wir analog

$$g = \frac{m_1.M}{r^2}; \text{ mithin}$$

$$(1)\ G : g = m : m_1 \text{ d. h.}$$

die Gewichte der Körper verhalten sich wie ihre Massen.

Aus einem später einzusehenden Grunde hat man diejenige Masse als Einheit angenommen, welche ein Gewicht

$$g = 33{,}608 \text{ b.} \mathfrak{A}$$

hat. Setzen wir daher $m_1 = 1$, so haben wir fortan als einfache Beziehung zwischen Masse und Gewicht die Grundgleichung aus (1)

$$(2)\ G = mg; \text{ oder } m = \frac{G}{g} \text{ d. h.}$$

man erhält die Masse eines Körpers, wenn man sein Gewicht durch die constante Zahl 33,608 dividirt.

§ 67. Bestimmung des Schwerpunktes. Vor allem setzen wir die betrachteten Körper als homogen d. h. als solche voraus, deren Masse in allen Punkten gleichartig und gleichmäßig vertheilt ist. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für einzelne Körper der Schwerpunkt von selbst, wie z. B. für den Kreis, das Parallelogramm, die Kugel, den Cylinder, das Parallelepiped und für die regulären Polyeder, bei welchen Körpern der Schwerpunkt jedesmal mit dem geometrischen Mittelpunkt zusammenfällt. Denn jede durch diesen Punkt gezogene Gerade wird geometrisch halbirt, so daß nach dem Begriffe der statischen Momente die Massentheilchen der einen Hälfte denen der andern nothwendig Gleichgewicht halten.

§ 68. Allgemeine Regeln zur Bestimmung des Schwerpunktes.

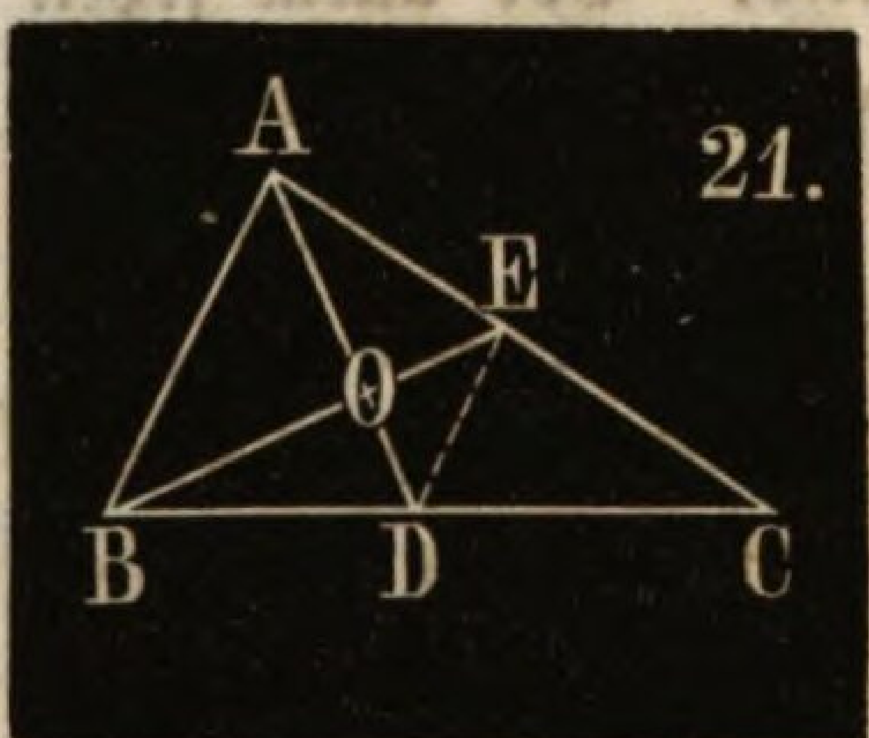
1) Da bei homogenen Körpern gleiche Volumen auch gleiche Massen enthalten, so werden gleiche Volumen desselben Körpers von der Erde gleich stark angezogen und haben daher auch gleiches Gewicht. Kann man also einen homogenen Körper geometrisch halbiren und die Schwerpunkte A und B der beiden Hälften bestimmen, so liegt der Schwerpunkt des ganzen Körpers nothwendig in der Mitte von AB.

2) Kann man einen Körper so halbiren, daß die Massentheilchen der einen symmetrisch gegen die andere Hälfte liegen, so liegt der Schwerpunkt in der halbirenden Ebene oder Geraden. Läßt sich dieses mehrmals ausführen, so liegt der Schwerpunkt im Schnittpunkt zweier den Körper halbirenden Ebenen oder Geraden.

3) Zerlegt man den Körper in zwei ungleiche Theile P und Q und sind beziehungsweise A und B ihre Schwerpunkte, so liegt der Schwerpunkt des Körpers auf der Geraden AB in einem Punkte C, so daß die Bedingung

$AC.P = BC.Q$ stattfindet.

§ 69. Schwerpunkt eines Dreieckes. Lehrsatz.



Zieht man von der Spitze A eines Dreieckes (Fig. 21) nach der Mitte D der Basis BC eine Gerade, so liegt der Schwerpunkt O auf AD in einer Entfernung von der Spitze $AO = \frac{2}{3} AD$.

Bew. Jede zu BC parallele Gerade wird durch AD halbirt; folglich hat jede solche Gerade ihren Schwerpunkt im Halbirungspunkt. Alle diese Punkte liegen aber auf AD, folglich muß AD den Schwerpunkt des Dreieckes selbst enthalten. Aus demselben Grunde muß der Schwerpunkt auch auf der Geraden BE, welche AC halbirt, liegen. Da nun der

Schwerpunkt auf zwei verschiedenen Geraden zugleich liegt, so kann es nur ihr Schnittpunkt O sein.

Ziehen wir noch ED, so ist ED ⧺ AB und △ODE ∾ △AOB; mithin

$$\begin{array}{l} AO : OD = AB : DE \\ AB : DE = BC : CD = 2 : 1 \\ \hline AO : OD = 2 : 1, \text{ oder} \\ AO : AD = 2 : 3; \text{ folglich} \\ \quad AO = \frac{2}{3} AD. \end{array}$$

§ 70. Zus. Zerlegen wir das Viereck ABCD durch eine Diagonale in die zwei Dreiecke ABC und ACD nnd bestimmen ihre Schwerpunkte O_1 und O_2, so hat der Schwerpunkt O des Viereckes auf O_1O_2 eine solche Lage, daß die Bedingung

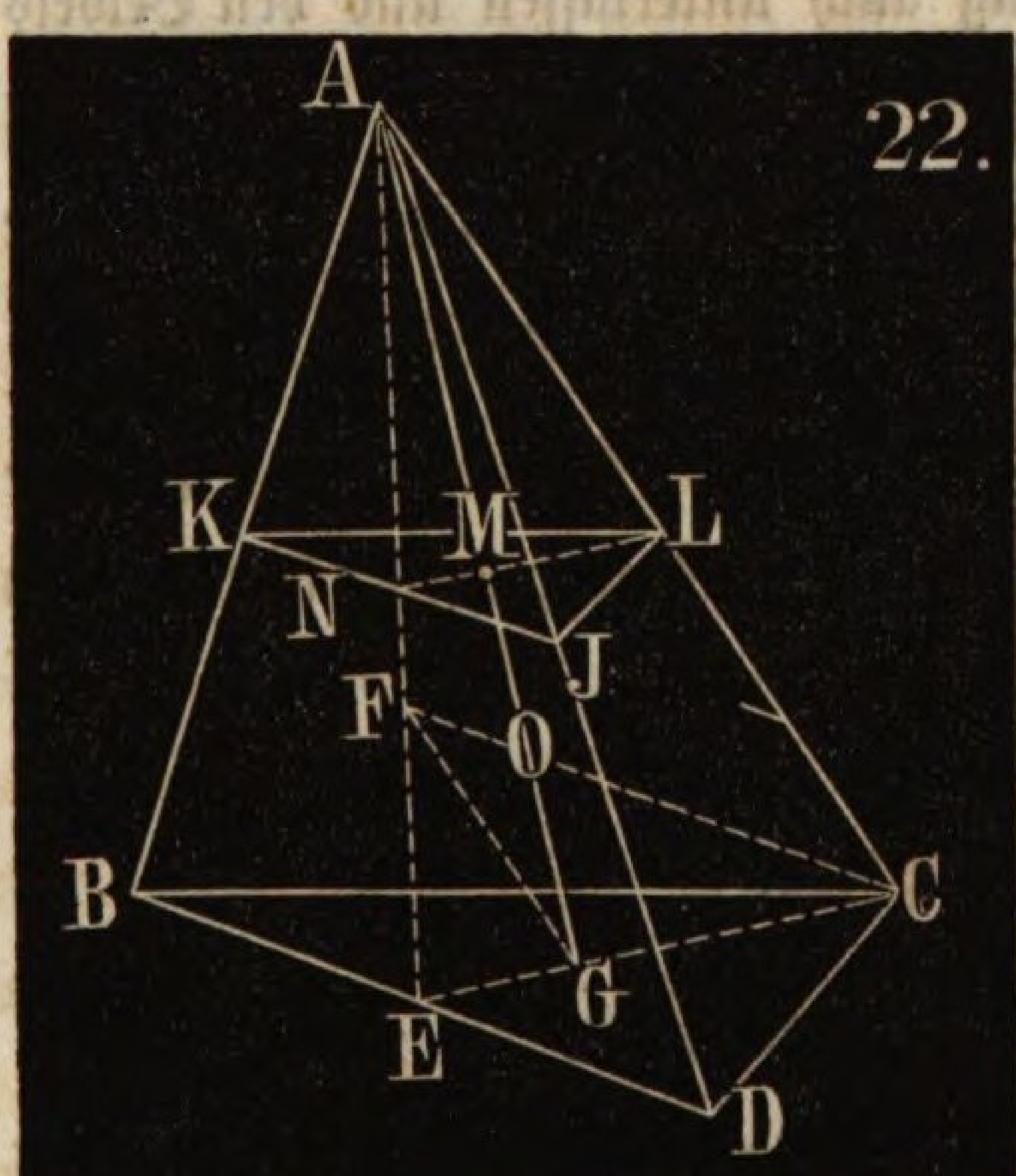
$$O_1O : O_2O = \triangle ACD : \triangle ABC$$

erfüllt sein muß. Vom Viereck kann man auf ein Fünfeck, Sechseck u. s. w. übergehen.

§ 71. Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide.

Lehrs. Der Schwerpunkt O einer dreiseitigen Pyramide liegt auf einer Geraden AG, welche die Spitze mit dem Schwerpunkt G der Basis verbindet, in einer Entfernung von der Spitze

$$AO = \frac{3}{4} AG.$$



Bew. Sei (Fig. 22) G der Schwerpunkt der Basis und F der des △ABD. Legen wir eine beliebige Ebene ⧺ zur Basis und ziehen LN, so ist △KLJ ∾ △BCD und hat seinen Schwerpunkt M auf der Geraden AG. Denn erstlich ist KN = JN wegen BE = ED, ferner ist aus der Aehnlichkeit der Dreiecke LM : LN = CG : CE; mithin LM = $\frac{2}{3}$ LN und M der Schwerpunkt des Dreieckes JKL. Aus demselben Grund hat

jeder andere parallele Schnitt seinen Schwerpunkt auf AG, und mithin liegt auch der Schwerpunkt der Pyramide auf AG. Ziehen wir CF so liegt der Schwerpunkt der Pyramide aus demselben Grunde auch auf CF; folglich ist der Schnittpunkt O der Schwerpunkt der Pyramide. Ziehen wir noch FG, so ist FG $\#$ AC und wir haben

$$AO : GO = AC : FG$$
$$AC : FG = CE : GE$$
$$CE : GE = 3 : 1; \text{ mithin}$$
$$AO : GO = 3 : 1, \text{ oder}$$
$$AO : AG = 3 : 4, \text{ oder}$$
$$AO = \tfrac{3}{4} AG.$$

§ 72. Zus. Vorstehender Lehrsatz gilt wörtlich für eine n seitige Pyramide, wenn G der Schwerpunkt der Basis ist. Denn zerlegt man die n seitige Pyramide in 3 seitige, so hat jede Pyramide ihren Schwerpunkt in einer Ebene, welche durch O parallel zur Basis gelegt wird unter Voraussetzung, daß AO $= \frac{3}{4}$ AG ist. Die Schnittfigur hat aber ihren Schwerpunkt auf AG aus demselben Grunde, als das $\triangle$ JKL seinen Schwerpunkt M auf AG hat; mithin ist O Schwerpunkt der ganzen Pyramide.

Anm. Man kann die Theilung auch unterlassen und den Beweis gerade so führen, wie für die dreiseitige Pyramide.

§ 73. Zus. Der Schwerpunkt eines Kegels liegt auf seiner Höhe h in einer Entfernung von der Spitze AO $= \frac{3}{4}$ h.

§ 74. Zus. Der Schwerpunkt eines Prisma liegt in der Mitte derjenigen Geraden, welche die Schwerpunkte der beiden Grundflächen verbindet.

Sechstes Capitel.

Anwendung auf Maschinen.

§ 75. Erkl. Maschine ist im Allgemeinen jede Vorrichtung, welche die Wirkung einer Kraft in bestimmter Absicht ver-

mittelt oder fortpflanzt. Beispiele von Maschinen der einfachsten Art sind: Der Hebel (Wage), das Rad an der Welle, der Haspel, die Rolle, die schiefe Ebene, der Keil, die Schraube und andere.

§ 76. **Der Hebel.** Jeder unbiegsame Stab oder stabförmige Körper, der in einem Punkte unterstützt und in seinen Endpunkten von Kräften angegriffen wird, heißt Hebel. An jedem solchen Hebel wirken drei Kräfte, deren Gleichgewichtsbedingungen nach dem Principe der statischen Momente § 27 sich aufstellen lassen. Weil aber kein Hebel gewichtslos ist, wie dort vorausgesetzt wurde, so kommt sein Gewicht als neue Kraft hinzu, und man nennt ihn einen physischen Hebel zum Unterschied vom gewichtslosen, welcher mathematischer Hebel heißt. Es läßt sich aber jeder physischer Hebel auf einen mathematischen reduziren. Denn ist AB ein gleichförmiger und homogener physischer Hebel, und C sein Unterstützungspunkt, und setzen wir $AC = a$ und $BC = b$, sein Gewicht $= p$, so wirkt das Gewicht von AC und BC jedes als Kraft für sich im Schwerpunkte eines jeden Stabes. Da nun die Schwerpunkte in der Mitte von a und b liegen und ihre Gewichte beziehungsweise durch $\frac{ap}{a+b}$ und $\frac{bp}{a+b}$ ausgedrückt sind, so hat AC ein statisches Moment $= \frac{a}{2} . \frac{ap}{a+b}$ und BC desgleichen $= \frac{b}{2} . \frac{bp}{a+b}$. Wirken demnach in A und B zwei parallele Kräfte P und Q, so ist die Bedingung des Gleichgewichts

$$aP + \frac{a^2p}{2(a+b)} = bQ + \frac{b^2p}{2(a+b)}; \text{ oder}$$

$$aP = bQ - \frac{a-b}{2} p.$$

Da nun für ein und denselben Hebel die Größe $\frac{a-b}{2} p$ constant ist, so läßt sich die Reduktion praktisch sehr leicht dadurch ausführen, daß man an dem kürzeren Theil ein Gewicht

g anhängt, dessen Moment der constanten Größe gleich ist, was versuchsweise jedesmal ausgeführt werden kann, ohne die Schwerpunkte zu kennen. Im Falle a = b folgt P = Q ohne Reduktion.

Die Strecken AC und BC nennt man Hebelarme, den Hebel selbst zweiarmig; dagegen heißt er einarmig, wenn der Unterstützungspunkt in einem der Endpunkte sich befindet. Bilden die beiden Arme eines Hebels einen unveränderlichen Winkel, so heißt er Winkelhebel. Bei den nachfolgenden Hebeln setzen wir die Reduktion immer als geschehen voraus.

§ 77. Die Wage.

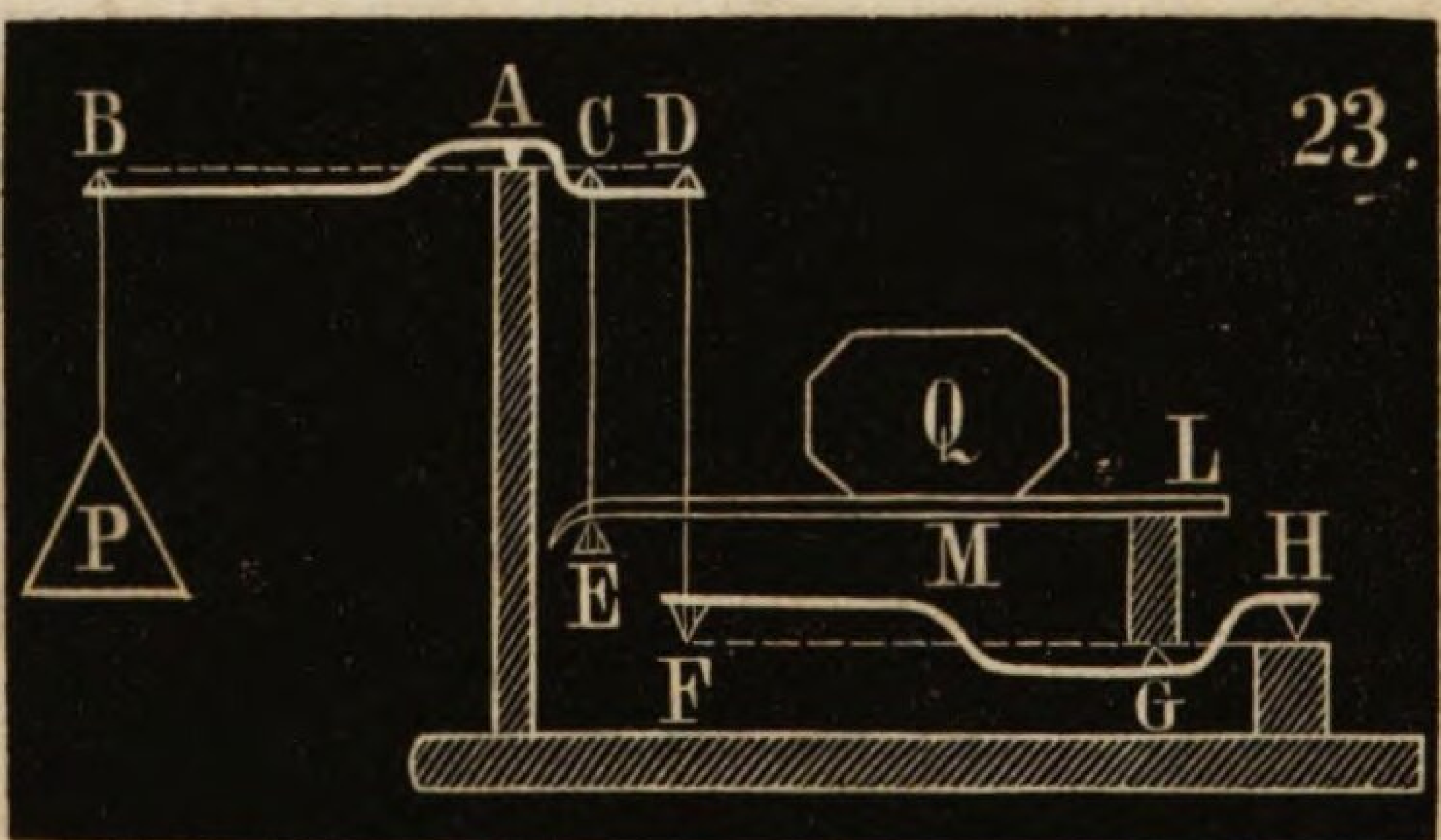
a) Die **gemeine** oder **Krämerwage** ist ein zweiarmiger Hebel, dessen Unterstützungspunkt von den Endpunkten gleich weit entfernt ist. Die Bedingung des Gleichgewichts ist daher

$$P = Q.$$

b) Die **Schnellwage** ist ein Hebel mit zwei Armen von ungleicher Länge. Die Bedingung des Gleichgewichts ist daher

$$a.P = b.Q.$$

Das Gewicht (der Läufer genannt) ist gewöhnlich verschiebbar, während der Arm, an welchem die zu wägende Last angebracht wird, unveränderlich ist.



c) Die **Straßburger** oder **Brückenwage** von Quintenz. Dieselbe ist eine Zusammensetzung aus drei Hebeln BD, EL, FH (Fig. 23). Der Wagbalken BD balancirt auf einer Schneide in A, trägt in B das Gewicht P und auf zwei Schneiden in

C und D mittelst der Stäbe CE, DF die Last Q, welche auf der Brücke EL ruht und vermöge LG auf den Hebel FH einen Druck ausübt. Der Hebel EL hat seinen Stützpunkt in L und der Hebel FH in H. Außerdem ist die Einrichtung getroffen, daß die Bedingung

$$AC : CD = GH : FG$$

erfüllt sein muß. Unter dieser Voraussetzung ist die Bedingung des Gleichgewichts

$$AB.P = AC.Q.$$

Denn bezeichnen wir mit x, y, z die in C, D, L, oder was dasselbe ist, in E, F und G wirkenden und von der Last Q ausgehenden Kräfte, so haben wir nach dem Hebelgesetze für unsere drei Hebel, wenn wir uns den Angriffspunkt der Last in M denken

$$(1)\ AB.P = AC.x + AD.y$$
$$(2)\ EL.x = LM.Q$$
$$(3)\ FH.y = GH.z.$$

Werden aus (2) und (3) die Werthe von x und y in (1) gesetzt, so wird

$$AB.P = AC.Q.\frac{LM}{LE} + AD.z.\frac{GH}{FH}, \text{ oder}$$

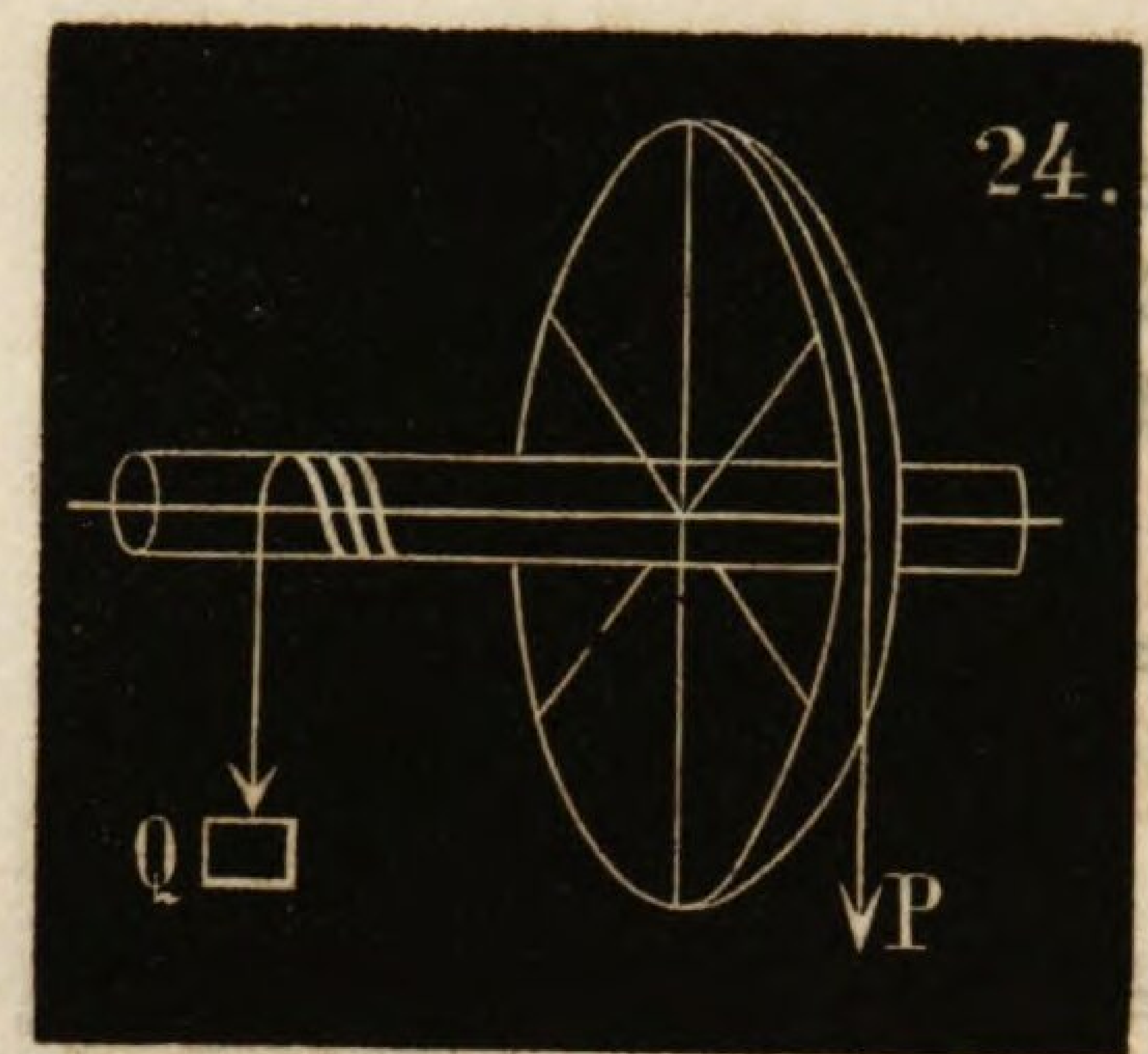
mit Rücksicht auf $\frac{GH}{FH} = \frac{AC}{AD}$ nach der Voraussetzung

$$AB.P = AC.\left(\frac{LM}{LE}.Q + z\right).$$

Um nun z zu eliminiren kann man sich E fest denken, dann ist LE.z = EM.Q. Mit Hülfe dieser Gleichung verwandelt sich die vorige in

$$AB.P = AC.Q.$$

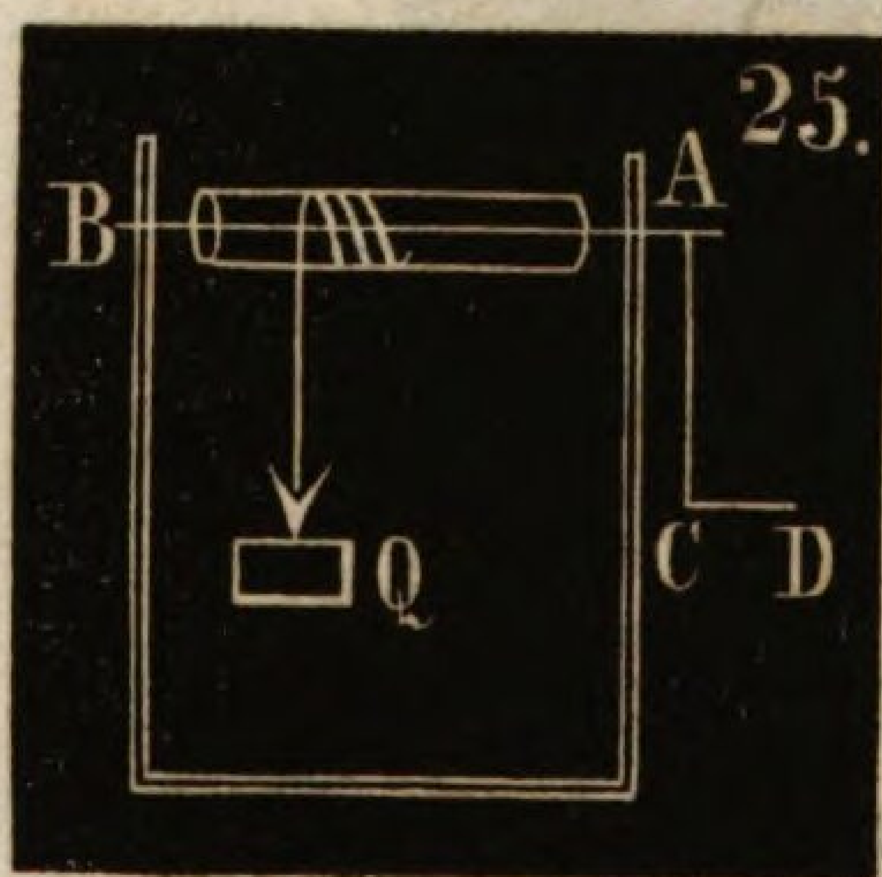
Die Lage von Q ist also völlig gleichgiltig, was ein großer praktischer Vortheil ist; überdieß ist in der Regel $AC = \frac{1}{10}$ AB. In diesem Falle heißt die Wage Dezimalwage, und es hält 1 ℔ Gewicht einer Last von 10 ℔ das Gleichgewicht.



§ 78. **Das Wellrad.** (Fig. 24.) An einem um seine Achse drehbaren Cylinder (der Welle) ist eine kreisrunde Scheibe oder Rad so befestigt, daß der Mittelpunkt in die Achse der Welle fällt. Um beide Theile, Welle und Rad, winden sich in entgegengesetzter Richtung zwei Seile, an deren Enden zwei parallele Kräfte P und Q wirken. Die Angriffspunkte der Kräfte liegen in der Peripherie von Welle und Rad, der Stütz- oder Drehpunkt in der Achse. Die Bedingung des Gleichgewichts besteht hier in der Gleichheit der Momente an Welle und Rad

$$r.Q = R.P,$$

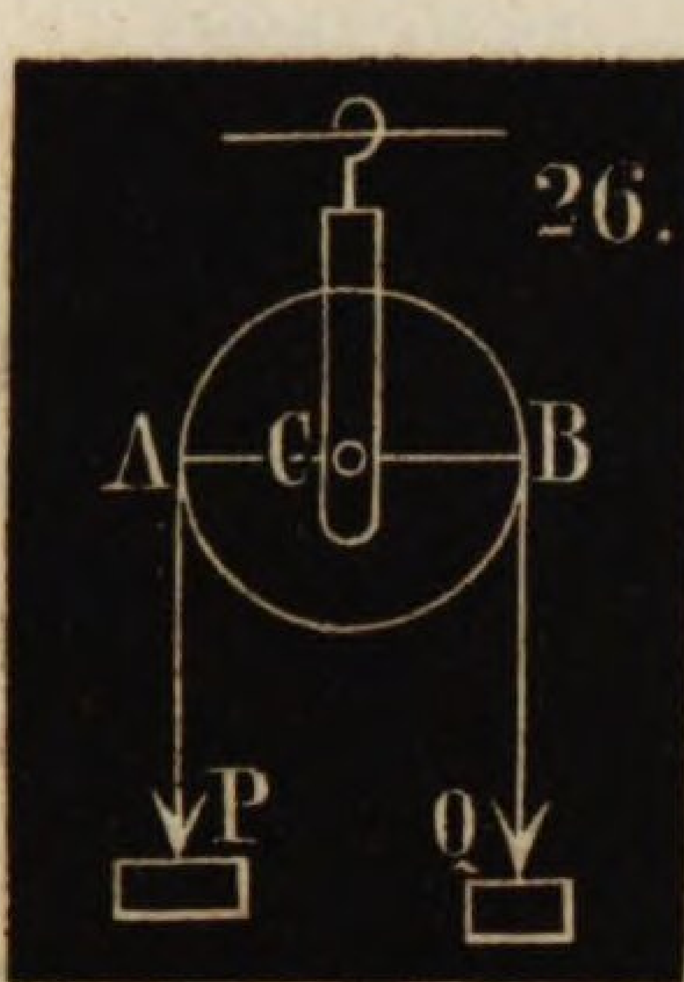
was wir entweder nach § 27 oder noch passender mit Hülfe zweier Kräftepaare nach § 57 erklären, indem wir in der Achse noch zwei antiparallele Kräfte P und Q anbringen, wodurch wir einerseits zwei Kräftepaare von entgegengesetzter Wirkung erhalten, und andererseits bemerken, daß die eingeführten Kräfte durch den Widerstand der Achse aufgehoben werden. Andere Sätze lassen sich nicht wohl anwenden, weil unser System kein freies ist, was von allen Maschinen gilt.



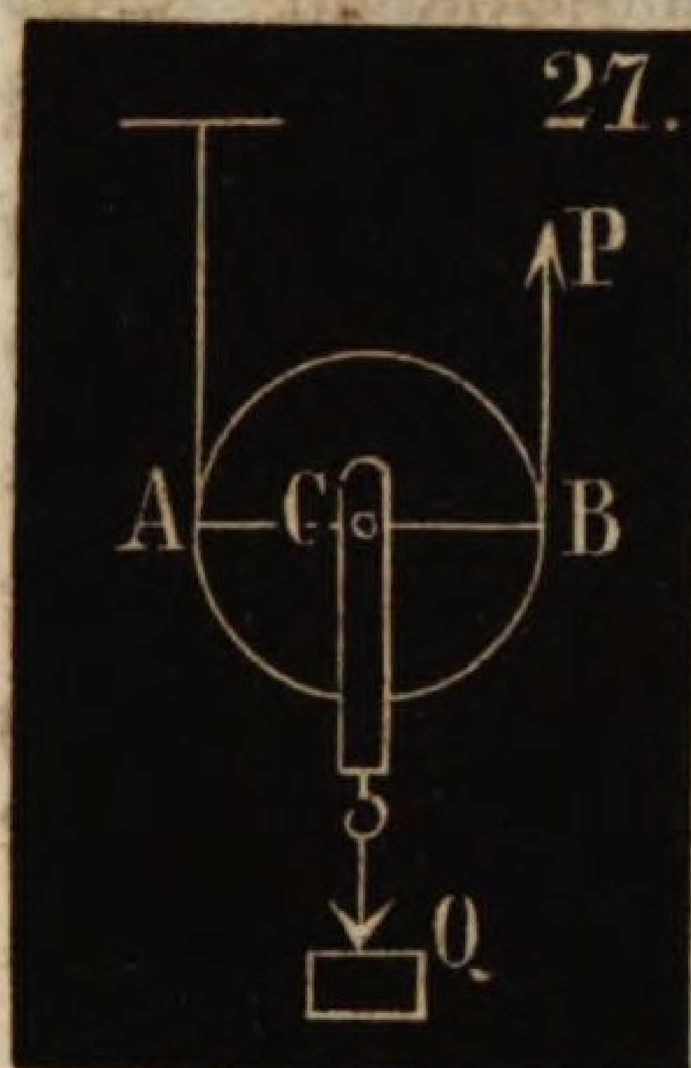
§ 79. **Der Haspel.** Tritt im vorhergehenden Falle an die Stelle des Rades eine Speiche AC (Fig. 25) mit einem Griffe CD, so heißt die Vorrichtung Haspel, AC Triebstock, im krummen Zustand Kurbel. Die Gleichgewichtsbedingung bleibt dieselbe, nämlich

$$r.Q = AC.P.$$

§ 80. **Die Rolle.** Dieselbe ist eine kreisrunde, um eine Achse bewegliche Scheibe mit einem hohlen Rande zur Aufnahme



eines Seiles, an dessen Ende zwei Kräfte P und Q wirken. Die Rolle ist entweder fest (Fig. 26), oder beweglich (Fig. 27). In beiden Fällen haben wir die Wirkungsweise eines Hebels. Bei der festen Rolle sind die Angriffspunkte in den Endpunkten des Durchmessers AB, der Stückpunkt in C, der Mitte von AB; daher die Bedingung des Gleichgewichts

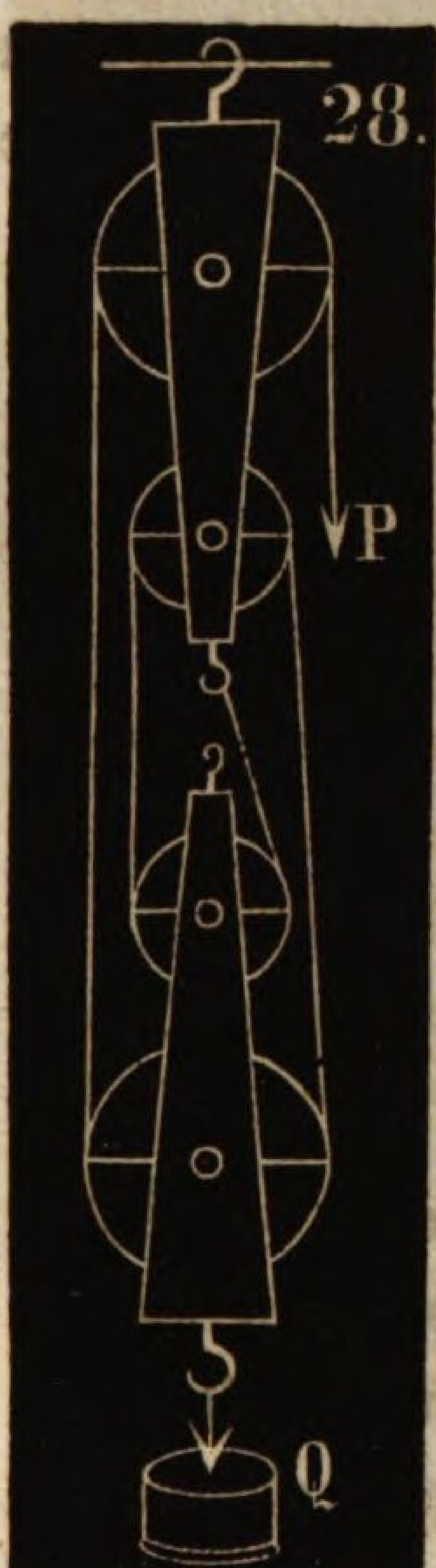


$$P = Q.$$

Bei der beweglichen Rolle sind die Angriffspunkte in B und C, der Stützpunkt in A; daher die Bedingung des Gleichgewichts $AB.P = AC.Q$, oder wegen $AB = 2AC$

$$P = \tfrac{1}{2} Q.$$

In beiden Fällen hat die Größe der Rolle keinen Einfluß.

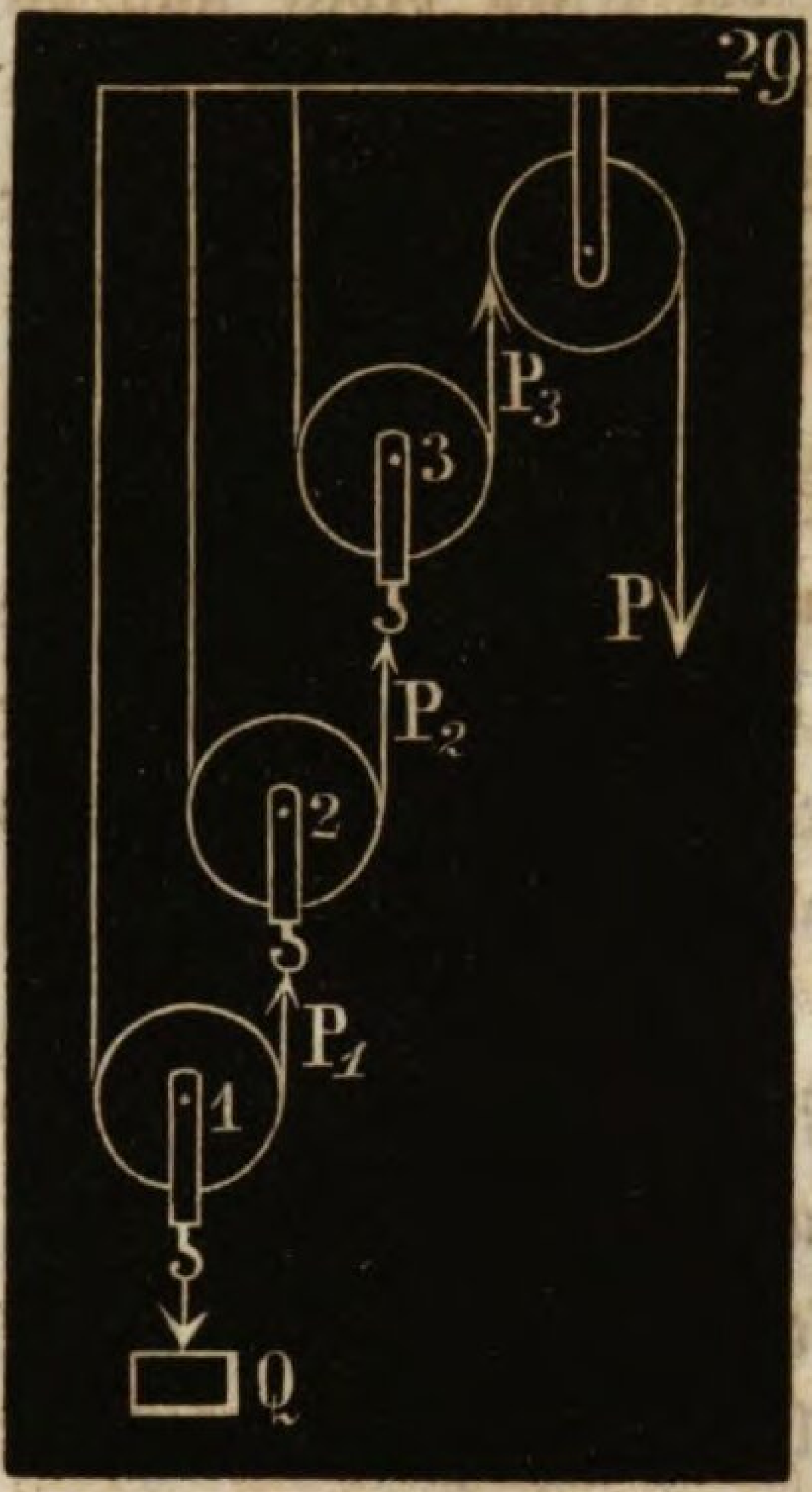


§ 81. **Der Flaschenzug.** Derselbe besteht aus zwei Gehäusen (Flaschen), von denen jedes dieselbe Anzahl Rollen trägt, wie Fig. 28 veranschaulicht. Die untere Flasche ist beweglich, die obere fest. Da die Größe der Rolle ohne Einfluß ist, so trägt im Zustande des Gleichgewichts offenbar jede Rolle denselben Antheil der Last Q, oder was dasselbe ist, die Spannung des Seiles ist überall dieselbe. Ist nun n die Anzahl der Rollen in der unteren Flasche, so trägt jede Rolle den nten Theil der Last. An der untersten Rolle wirken demnach in den Punkten A und C zwei parallele Kräfte P und $\frac{1}{n} Q$, welche im Gleichgewicht sind, sobald analog Fig. 27 die Bedingung

$$AB.P = AC.\frac{1}{n}Q,$$ oder auch wegen

$$AB = 2AC;\ P = \frac{1}{2n} Q$$

erfüllt ist. Unter dieser Bedingung ist die unterste Rolle, also auch der ganze Zug im Gleichgewicht.



§ 82. **Der Potenzflaschenzug.** Derselbe ist eine Zusammensetzung aus beweglichen Rollen mit einer festen, wie Fig. 29 veranschaulicht. Sind nun $n + 1$ Rollen gegeben, so ist die feste Rolle ohne jeden Einfluß auf das Gleichgewicht und braucht deßhalb nicht mitbetrachtet zu werden. Außerdem dürfen wir den Radius r einer jeden der n beweglichen Rollen gleich voraussetzen. Soll nun die Kraft P der Kraft oder Last Q Gleichgewicht halten, und bezeichnen wir mit $P_1, P_2, P_3 \ldots$ die an den auf einander folgenden Rollen angreifenden Kräfte, welche von Q herrühren, so haben wir nach § 80

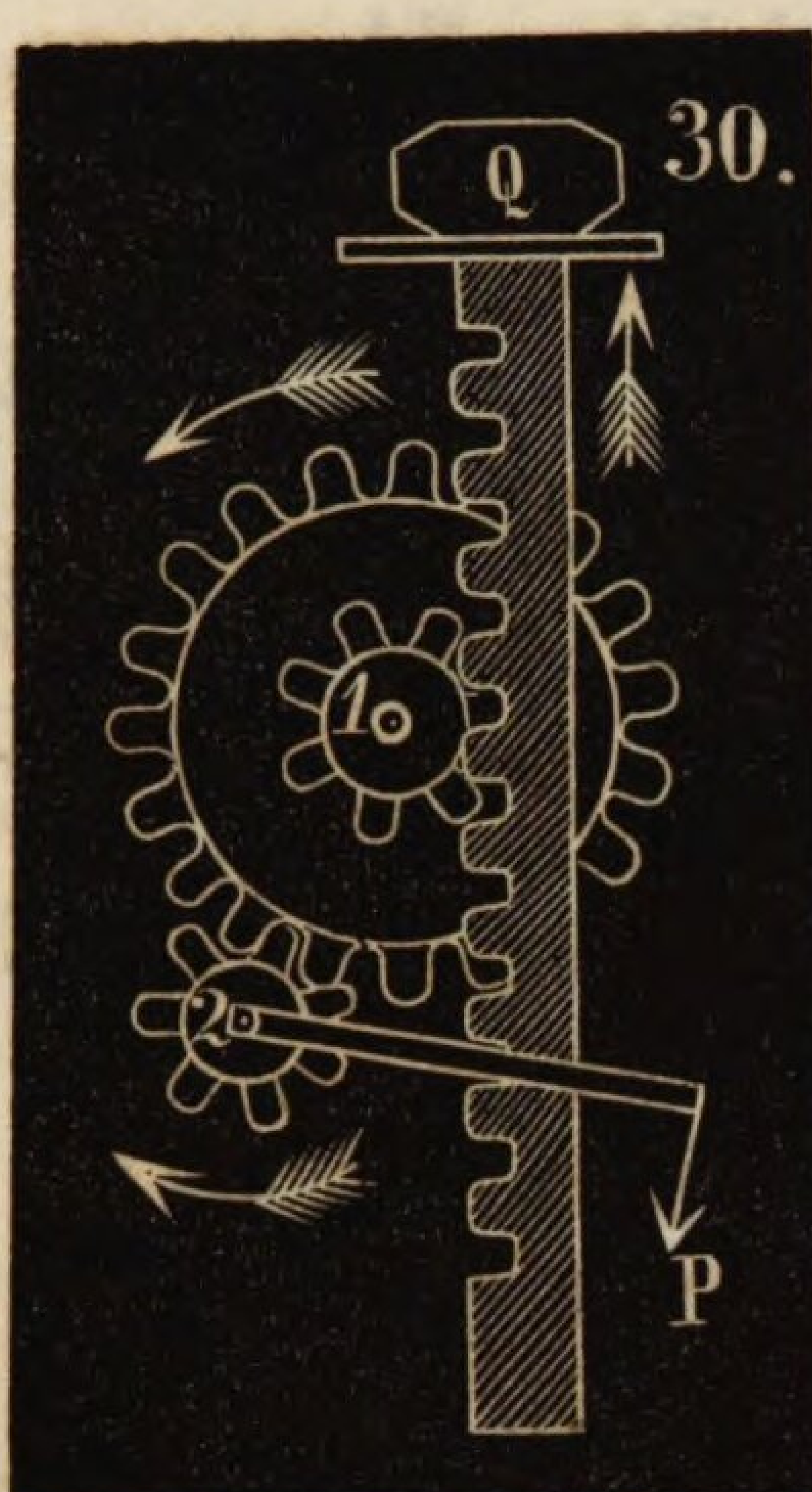
$$Q = 2P_1 = 2^1P_1 \quad \text{an der Rolle (1)}$$
$$2P_1 = 4P_2 = 2^2P_2 \quad \text{„ „ „ (2)}$$
$$2^2P_2 = 8P_3 = 2^3P_3 \quad \text{„ „ „ (3)}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$2^{n-1}P_{n-1} = 2^nP \quad \text{„ „ „ (n)}$$

folglich $Q = 2^nP$

als Bedingurg des Gleichgewichts für n bewegliche Rollen.

Anm. Selbstverständlich muß auch noch das Gewicht jeder Rolle in Rechnung gebracht werden.

§ 83. **Die Winde.** Dieselbe besteht aus einer gezahnten eisernen Stange, welche die Last Q angreift, und einem Räderwerk, welches die an einer Kurbel (Fig. 30) wirkende Kraft P vermittelt. Die gezahnte Stange greift in die gezahnte Welle (1), an welcher ein gezahntes Rad befestigt ist. Dieses letztere greift

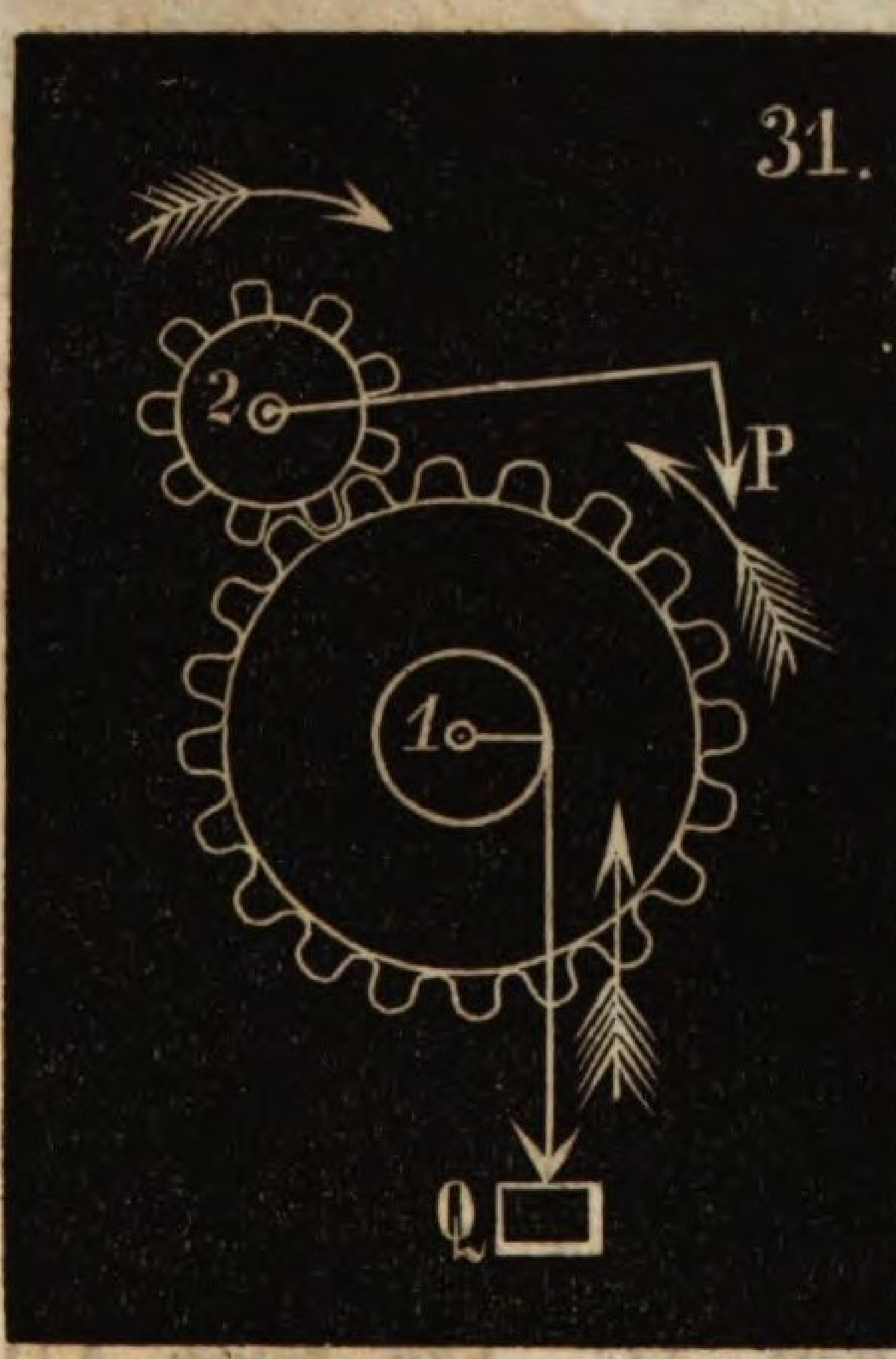


in die gezahnte Welle (2), mit welcher eine Kurbel fest verbunden ist. Das Ganze ist demnach eine Zusammensetzung aus zwei Hebeln, welche ihren Stützpunkt in der Achse der beiden Wellen haben. Bezeichnen wir den Radius des Rades mit R, die Radien der Wellen mit r und r_1, die Länge des Hebelarmes mit a und die Kraft, welche an der Welle (2) der Kraft P das Gleichgewicht hält mit P_1, so haben wir

$$aP = r_1.P_1 \quad \text{an der Welle (2)}$$
$$R\,P_1 = r.Q \quad \text{„ „ „ (1)}$$

mithin $a.R.P = r.r_1.Q$

als Bedingung des Gleichgewichts.



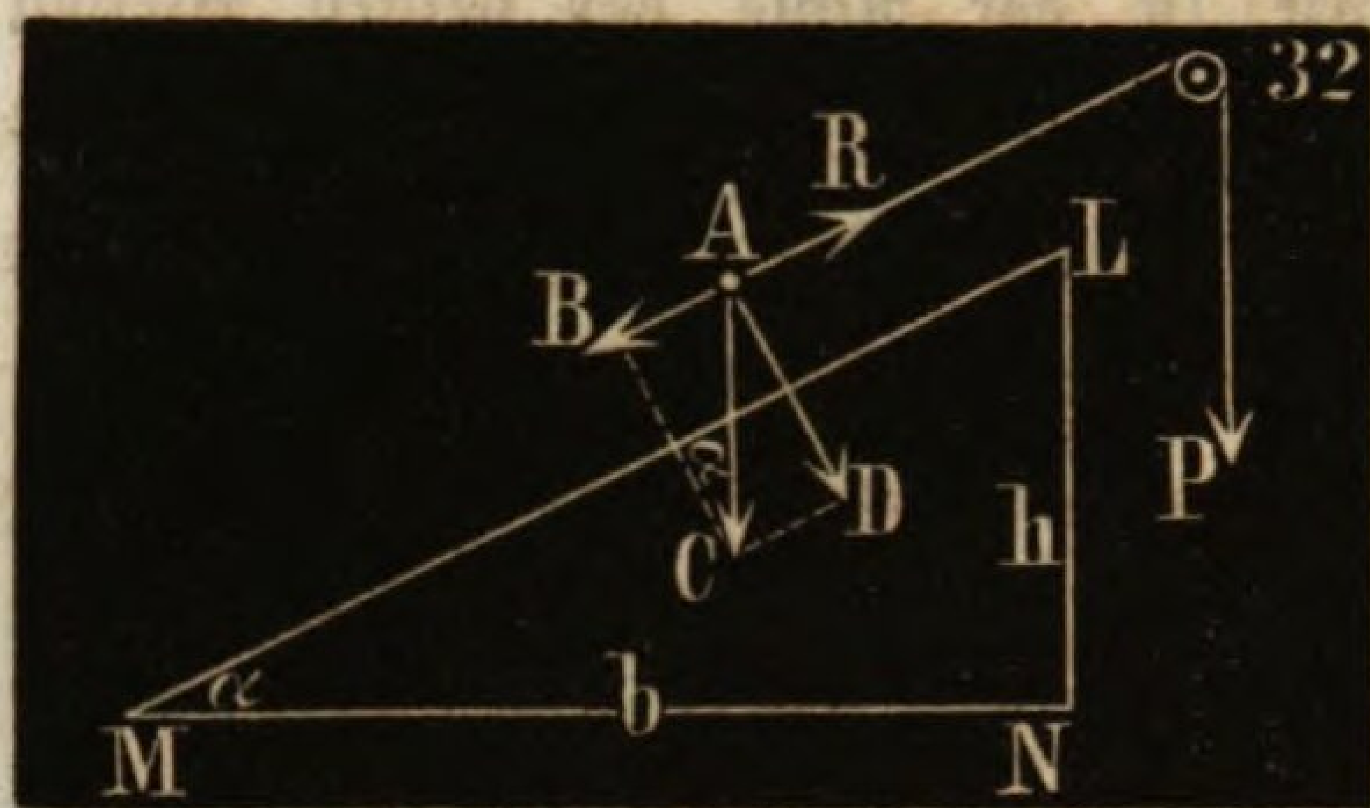
§ 84. **Der Bauaufzug.** Derselbe ist der Winde ganz ähnlich, wie Fig. 31 veranschaulicht. Ein Seil, an dessen einem Ende die Last Q sich befindet, windet sich um die Welle (1); das damit verbundene Rad greift in die Welle (2), welche vermittelst des Kurbelarms von der Kraft P in A in Bewegung gesetzt wird. Die Maschine besteht also, wie die Winde, aus zwei Wellen, einem Rade und einer Kurbel und ist wesentlich eine Zusammensetzung aus zwei Hebeln. Die Gleichungsgewichtsbedingung ist daher

$$a.R.P = r.r_1.Q.$$

§ 85. Zus. Eine ähnliche Maschine ist der Krahn oder Kranich, welche nur eine Welle mit einem gezahnten Rade mehr

enthält, und zum Heben schwerer Schiffslasten benützt wird. Die Gleichgewichtsbedingung ist

$$a.R.R_1.P = r.r_1.r_2.Q.$$



§ 86. **Die schiefe Ebene.** Schief heißt jene Ebene, welche gegen den Horizont eine Neigung $\alpha < 90^0$ hat. In Fig. 32 stellt MN die horizontale, LN die vertikale und LM die schiefe Ebene vor. Da LN $\perp$ MN ist, so heißt LN auch die Höhe und MN die Basis der schiefen Ebene. Befindet sich eine Last vom Gewichte Q, deren Schwerpunkt in A sei, auf einer solchen Ebene, so wird sie von der Schwerkraft in der Richtung AC $\#$ LN mit einer Stärke gleich ihrem Gewichte angezogen gerade so, als wäre die ganze Masse im Schwerpunkte A vereinigt. Die Ebene, welche wir vollkommen glatt voraussetzen, leistet Widerstand und der Körper wird, sich selbst überlassen, anfangen längs LM abwärts zu gleiten. Soll aber die Last auf der Ebene erhalten bleiben, so muß eine Kraft P angebracht werden, deren Größe zu bestimmen ist. Obwohl diese Kraft eine willkürliche Richtung erhalten kann, so kommen in der Regel doch nur zwei Richtungen in Anwendung; entweder wird die Kraft der schiefen Ebene oder ihrer Basis parallel angebracht.

a) Wirkt P $\#$ LM (Fig. 32) und zerlegen wir die Kraft AC $=$ Q in die rechtwinkeligen Componenten AB und AD, so haben wir in A zwei Kräfte anstatt AC, von denen AD durch den Widerstand der Ebene aufgehoben wird, so daß AB allein den Körper zum Gleiten bringt. Wird demnach in A in der entgegengesetzten Richtung AR eine Kraft P angebracht, so wird Gleichgewicht stattfinden, wenn P $=$ AB ist. Nun ist in dem rechtwinkeligen $\triangle$ ABC, da $\angle$ ACB $= \alpha$ ist,

$$AB = AC \sin\alpha = Q \sin\alpha; \text{ folglich}$$

(1) $P = Q \sin\alpha$ als Bedingung des Gleichgewichts.

Ebenso einfach läßt sich der auf die Ebene ausgeübte Druck D durch

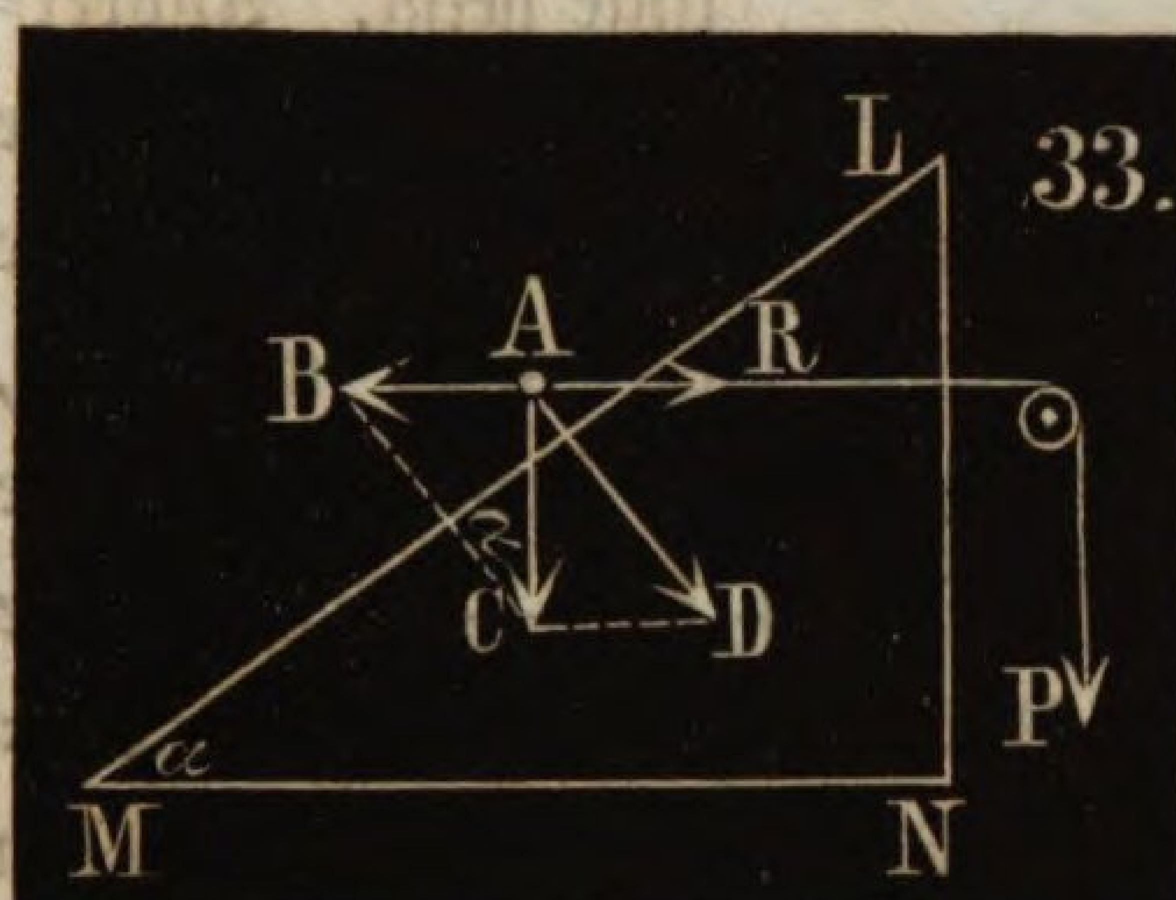
$$(2)\quad D = Q \cos\alpha$$

darstellen. Aus (1) und (2) folgt noch

$$(3)\quad P = D \operatorname{tang}\alpha.$$

Ist aber anstatt α die Höhe h und die Basis b gegeben, so wird

$$(4)\quad P = \frac{h.Q}{\sqrt{b^2 + h^2}};\quad (5)\quad D = \frac{b.Q}{\sqrt{b^2 + h^2}}.$$



33.

b) Wirkt die Kraft P horizontal, also ‖ MN, so läßt sich die von Q ausgehende Kraft AC (Fig. 33) in zwei Componenten AB und AD zerlegen, von denen AB ‖ MN und AD ⊥ LM wirkt. AD wird von der Ebene aufgehoben und AB bringt Q allein zum Gleiten. Es wird also Gleichgewicht eintreten, wenn in der entgegengesetzten Richtung AR eine Kraft P = AB angebracht wird. Nun ist in dem rechtwinkligen △ ABC, unter Beachtung, daß ∠ ACB = α ist,

$$AB = AC \operatorname{tang}\alpha = Q \operatorname{tang}\alpha; \text{ folglich}$$

$$(6)\quad P = Q \operatorname{tang}\alpha = Q.\frac{h}{b}.$$

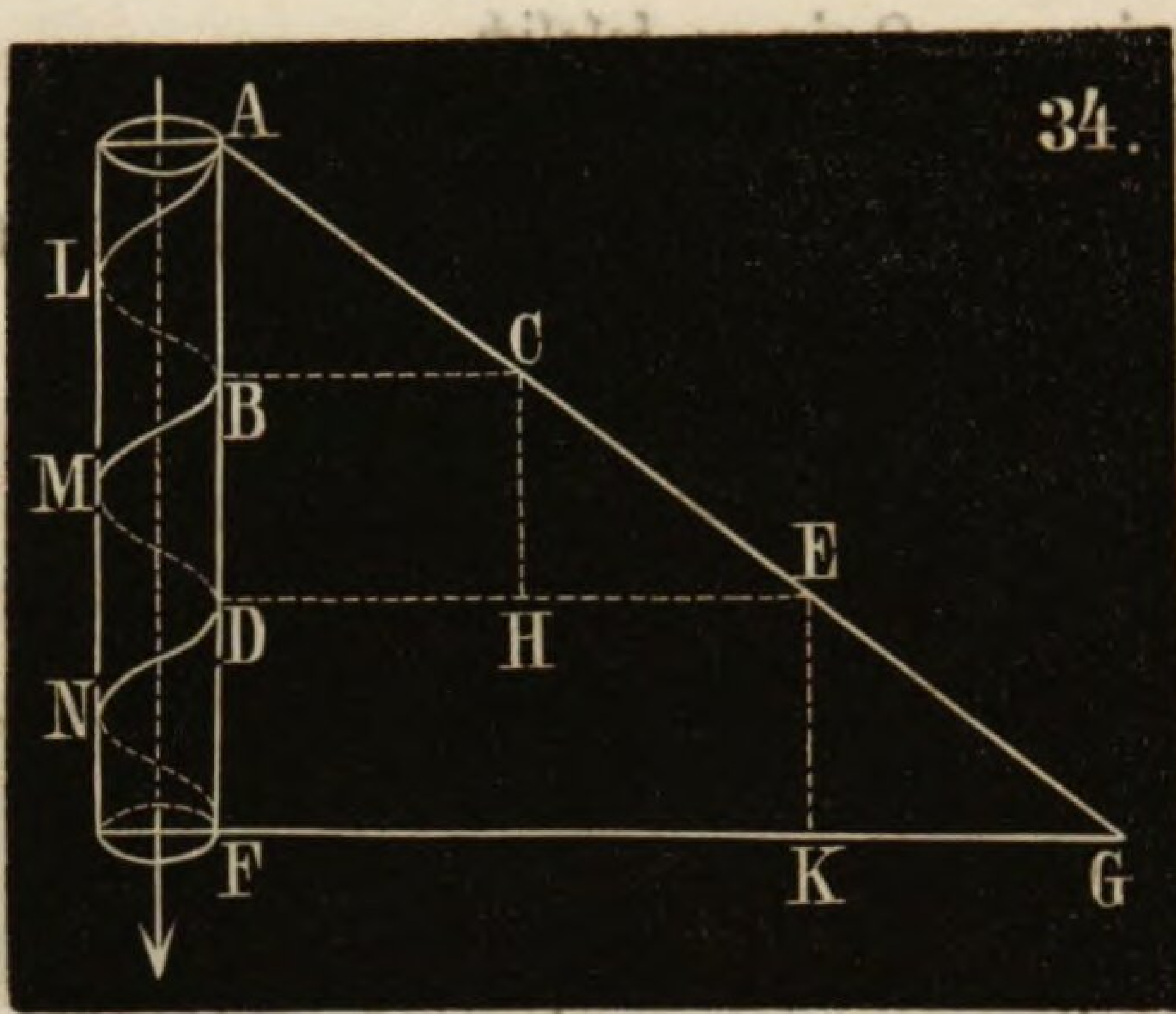
Für den Druck AD = D erhalten wir

$$(7)\quad D = \frac{Q}{\cos\alpha} = \frac{Q\sqrt{b^2 + h^2}}{b};$$

und aus (6) und (7), oder direkt aus △ ABC

$$(8)\quad P = D \sin\alpha = \frac{h.Q}{\sqrt{b^2 + h^2}}.$$

Anm. In beiden Fällen ist die Bedingung des Gleichgewichts von der Lage und Ausdehnung der Last Q unabhängig.



§ 87. **Die Schraube.** Wickelt man ein rechtwinkeliges Dreieck, wie AFG (Fig. 34) um einen senkrechten Cylinder, so legt sich die Hypotenuse AG in Gestalt einer krummen Linie herum, welche Schraubenlinie heißt. Andrerseits ist aber AG eine schiefe Ebene, also läßt sich auch die Schraubenlinie in jedem einzelnen Punkte, da es im Zustande des Gleichgewichts auf die übrige Gestalt nicht mehr ankommt, als schiefe Ebene betrachten. Ist nun ALB, BMD, DNF je ein voller Umgang, und ziehen wir BC ╫ DE ╫ FG, sowie CH ╫ EK ╫ AF, so ist nothwendig $BC = HE = KG = 2r\pi =$ dem Cylinderumfang, wenn r dessen Radius bezeichnet. Auf jeden Schraubenumgang trifft daher eine Strecke $s = AC = CE = EG$ und eine Höhe $h = AB = BD = DF$. Der senkrechte Abstand*) AB heißt Schraubenweite, der Cylinder Schraubenspindel und die der Spindel angepaßte Höhlung Schraubenmutter, das Ganze (Spindel und Mutter) nennt man Schraube. In der Anwendung dient die Schraube, theils einen Druck auszuüben, wie bei Pressen, theils Lasten zu bewegen. In allen Fällen erklärt sich ihre Wirkungsweise aus der Theorie der schiefen Ebene, indem hier wie dort nicht die Ausdehnung der Last, sondern nur ihr im Schwerpunkt angreifendes Gewicht in Betracht kommt. Die Kraft P wirkt bei jeder Schraube ╫ der Basis und hat ihren Angriffspunkt entweder in der Peripherie der Spindel oder an

---

*) In Wirklichkeit ist die Schraubenweite immer kleiner als AB, weil bei der Aushöhlung der Schraubengänge zu beiden Seiten der Kurve Cylindertheile gelassen werden müssen.

einem Hebelarm, der mit der Achse der Spindel fest verbunden ist, während die Last in der Richtung $AF \perp FG$ wirkt. Die Bedingung des Gleichgewichts ist daher nach Gl. (6) des vor. §.

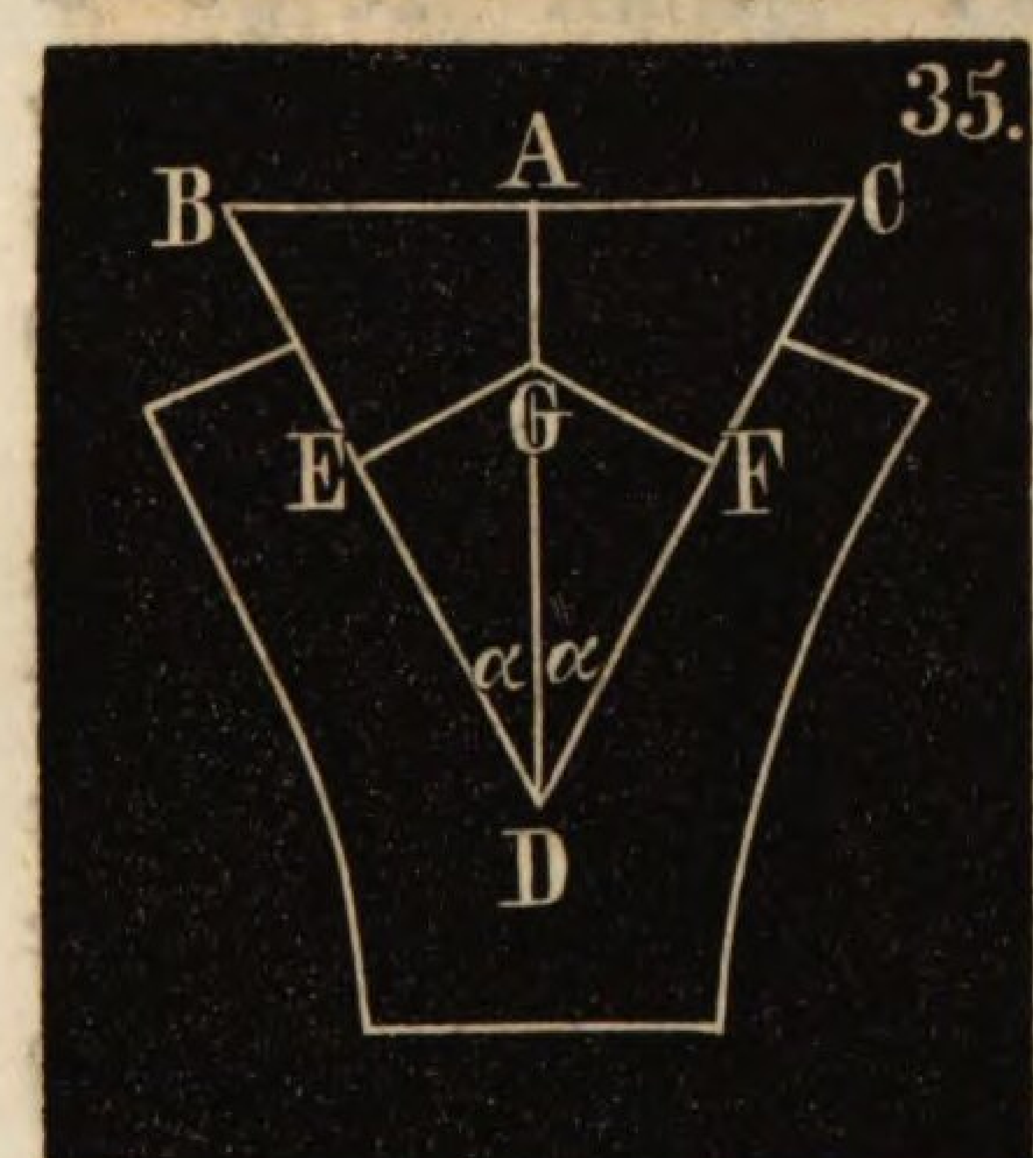
$$(1)\quad P = Q \operatorname{tang} AGF = Q . \frac{AB}{BC} = Q \frac{h}{2r\pi}$$

wenn P im Spindelumfang angreift. Denken wir uns eine zweite Spindel vom Radius = a und alle übrigen Größen ungeändert, so haben wir gleichfalls

$$(2)\quad P = \frac{h.Q}{2a\pi}.$$

Nun ist es aber ganz einerlei, ob wir uns unter a den Spindelradius, oder einen Hebelarm vorstellen, der mit der Achse fest verbunden ist und auf ihr senkrecht steht; mithin drückt (2) auch die Gleichgewichtsbedingung aus, wenn die Kraft an einem Hebelarm = a angreift.

Zugleich sieht man, daß P größer wird, wenn entweder h zunimmt oder r abnimmt und umgekehrt.



§ 88. **Der Keil.** Derselbe ist ein dreiseitiges Prisma, welches ein gleichschenkeliges Dreieck wie BCD (Fig. 35) zur Grundfläche hat, und mit einer Kante in D in einen festen Körper durch eine Kraft P eingetrieben wird, welche in A der Mitte von BC angreift und längs AD wirkt. Während der Keil eindringt bewegen sich die Seiten BD und CD parallel zu sich selbst und haben einen gewissen senkrechten Widerstand zu überwinden. Obwohl jeder Punkt der Seiten auf Widerstand stoßt, so kann doch die Summe aller Widerstände durch eine Einzelkraft D ausgedrückt werden, welche zu gleichen Theilen in E und F ihren Angriffspunkt haben mag.

Der in E und F wirkende Widerstand ist aber nichts anderes, als ein senkrechter Druck auf die schiefen Ebenen BD und

CD. Weil aber die Kraft P auf beide Ebenen sich gleichmäßig vertheilt, so ist die Bedingung des Gleichgewichts für jede dieser Ebenen nach § 86 Gl. (8)

$$(1)\ \frac{P}{2} = \frac{D}{2}\sin\alpha;\ \text{oder}\ P = D\sin\alpha,$$

wenn $\angle BDC = 2\alpha$, also $\angle ADB = \angle ADC = \alpha$ gesetzt wird. Setzen wir $BC = b$ und $AD = h$, so folgt noch

$$(2)\ P = \frac{b.Q}{2h}.$$

II. Theil.

Dynamik.

Erstes Capitel.

Von der Bewegung überhaupt.

§ 89. Grundbegriffe. Befindet sich ein Punkt in Bewegung, so ändert er beständig seinen Ort und beschreibt einen Raum, welcher sein Weg oder seine Bahn (Trajektorie) heißt. In diesem Zustande muß er auch so lange verharren, als er nicht durch eine äußere Ursache daran gehindert wird (Gesetz der Trägheit). Die Bewegung erfordert Raum und Zeit zugleich. Das Maaß der Zeit ist der Raum. So oft nämlich derselbe Punkt unter denselben Umständen gleichen Weg beschreibt, braucht er gleiche Zeit. Auf dem Zifferblatt einer Uhr z. B. lesen wir nicht die Zeit, sondern den Weg, welchen der Zeiger beschreibt, und nehmen den Weg als Maaß der Zeit.

§ 90. Arten der Bewegung. Beschreibt ein Punkt in gleichen Zeiten gleiche Wege, so ist seine Bewegung gleichförmig, außerdem ungleichförmig oder veränderlich *).

*) Außer diesem Eintheilungsgrunde gibt es noch viele andere, und man unterscheidet: absolute und relative, freie und unfreie, gerad- und krummlinige, sowie eine rotirende, schwingende und fortschreitende Bewegung.

§ 91. Geschwindigkeit. Haben zwei Punkte gleichförmige Bewegung und beschreiben sie in derselben Zeit verschiedene Wege, so haben sie verschiedene Geschwindigkeit. Wir bestimmen die Geschwindigkeit gleichfalls durch den Weg und verstehen darunter den in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg. Die Zeiteinheit in der Mechanik ist die Sekunde. Beschreibt ein Punkt bei gleichförmiger Bewegung in t Sekunden einen Weg $= s$ (spatium), so ist der in einer Sekunde zurückgelegte Weg $= \frac{s}{t}$, also seine Geschwindigkeit, welche wir fortan mit v (velocitas) bezeichnen, ausgedrückt durch

$$v = \frac{s}{t}.$$

Man kann daher bei der gleichförmigen Bewegung auch sagen: Geschwindigkeit ist der Weg dividirt durch die Zeit. Diese Erklärung läßt die Zeiteinheit unentschieden.

§ 92. Lehrsatz. Der Weg, den ein Punkt mit gleichförmiger Bewegung beschreibt, ist gleich dem Produkte aus Zeit und Geschwindigkeit.

Bew. Der Punkt beschreibt in jeder Sekunde einen Weg $= v$; also in 2 Sekunden 2v, in 3 Sekunden 3v ...., und in t Sekunden tv. Mithin ist allgemein

$$s = v.t.$$

§ 93. Erkl. Bei der veränderlichen Bewegung ist auch die Geschwindigkeit in jedem Augenblick eine andere, und es kann der in 1 Sekunde zurückgelegte Weg nicht mehr als Ausdruck der Geschwindigkeit genommen werden. Vorläufig genügt die Annahme, daß die veränderliche Geschwindigkeit in jeder Sekunde um dieselbe Größe zu- oder abnehme. Im ersteren Falle heißt die Bewegung gleichförmig beschleunigt, im letzteren gleichförmig verzögert. Die beständige Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit heißt Beschleunigung, welche fortan mit a (acceleratio) bezeichnet sei.

§ 94. Lehrs. Bei der gleichförmig beschleunigten, von der Ruhe ausgehenden Bewegung ist die erlangte Geschwindigkeit gleich dem Produkte aus Beschleunigung und Zeit. Also

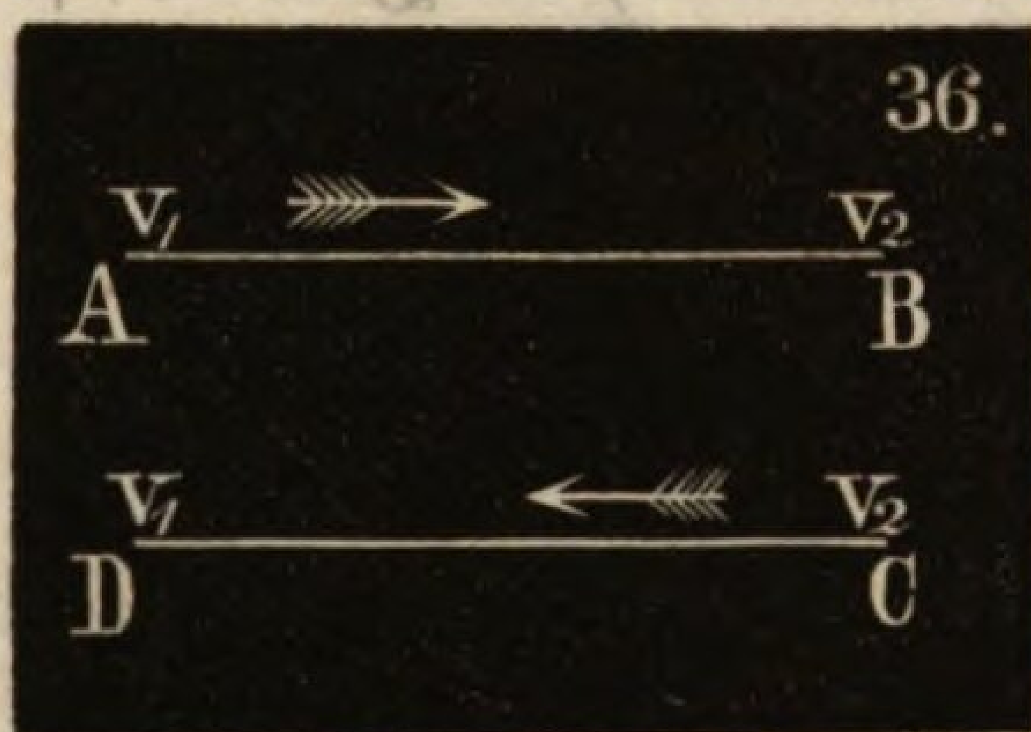
$$v = a.t.$$

Bew. Da die Geschwindigkeit mit o beginnt und in jeder Sekunde um a zunimmt, so ist am Ende der ersten Sekunde $v = a$, am Ende der 2^{ten} Sekunde $v = 2a \ldots .$, am Ende der t^{ten} Sekunde $v = t.a.$

§ 95. Zus. Hätte der Punkt eine Anfangsgeschwindigkeit $= v_1$, so wäre seine Geschwindigkeit v nach t Sekunden

$$v = v_1 + a.t.$$

§ 96. Lehrs. Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist der zurückgelegte Weg ausgedrückt durch das Produkt aus Zeit und dem arithmetischen Mittel der Anfangs- und Endgeschwindigkeit.



Bew. Angenommen, es bewege sich ein Punkt in der Zeit t von A nach B (Fig. 36) und habe in A und B beziehungsweise die Geschwindigkeit v_1 und v_2, so können wir in Gedanken gleichzeitig einen zweiten Punkt von C nach D in der Weise sich bewegen lassen, daß er während derselben Zeit t und mit gleichförmig abnehmender Geschwindigkeit einen gleichen Weg $CD = AB$ beschreibe, so zwar, daß er in C mit der Geschwindigkeit v_2 anfange und in D mit v_1 endige. Hat nun der erste Punkt nach einer gewissen Zeit an Geschwindigkeit um x zugenommen, also eine Geschwindigkeit $= v_1 + x$ erreicht, so hat der andere Punkt um ebensoviel abgenommen, also eine Geschwindigkeit $= v_2 - x$ erlangt. Die Summe aus beiden Geschwindigkeiten gibt $(v_1 + x) + (v_2 - x) = v_1 + v_2$ d. h. sie ist während der ganzen Dauer der Bewegung unveränderlich. Daraus folgt, daß beide Punkte in jeder Sekunde die gleiche Summe Weges von der Größe $= v_1 + v_2$ beschreiben. Beide Punkte beschreiben daher in t Sekunden zusammen einen Weg

$= (v_1 + v_2)t$. Andrerseits ist aber die Summe der Wege $AB + CD = 2AB$; mithin

$$2AB = (v_1 + v_2)t; \text{ oder}$$

$$AB = \frac{v_1 + v_2}{2} t.$$

§ 97. Zus. Setzen wir in dem vorigen Falle die Anfangsgeschwindigkeit $v_1 = o$ und die Endgeschwindigkeit $v_2 = v$, sowie den zurückgelegten Weg $= s$, so folgt aus der letzten Gleichung

$$(1)\ s = \tfrac{1}{2} v.t;$$

oder wenn wir nach § 94 $v = at$ substituiren

$$(2)\ s = \tfrac{1}{2} a.t^2, \text{ d. h.}$$

bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist der Weg gleich dem halben Produkte aus der Beschleunigung und dem Quadrate der Zeit.

§ 98. Zus. Während der Dauer von t Sekunden sind die einzelnen Endgeschwindigkeiten von Sekunde zu Sekunde der Reihe nach

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots\ldots\ t.a;$$

folglich ist der Weg in Rücksicht auf § 96 ausgedrückt durch

$$s = \frac{o + a}{2} + \frac{a + 2a}{2} + \frac{2a + 3a}{2} + \ldots + \frac{(t-1)a + ta}{2}$$

$$s = \frac{a}{2} + \frac{3a}{2} + \frac{5a}{2} + \ldots + \frac{(2t-1)a}{2}; \text{ oder}$$

$$s = \frac{a}{2}(1 + 3 + 5 + \ldots + (2t-1)); \text{ oder}$$

$$s = \frac{a}{2} \cdot \frac{(1 + 2t - 1)t}{2} = \frac{a}{2} t^2, \text{ wie vorhin.}$$

§ 99. Zus. Durch Umkehrung folgt für die Beschleunigung

$$a = \frac{2s}{t^2};$$

und wenn wir $t = 1$ setzen

$$a = 2s \text{ d. h.}$$

die Beschleunigung ist doppelt so groß als der in der ersten Sekunde zurückgelegte Weg, wenn die Bewegung von der Ruhe ausgeht.

Anm. Das bisher Gesagte gilt ebensowohl für gerad- als krummlinige Bahnen.

Zweites Capitel.

Von der Bewegung in Verbindung mit Kraft.

§ 100. Erkl. Jede Kraft braucht, um eine Bewegung zu erzeugen, eine gewisse Zeit, auch dann noch wenn die Dauer des Angriffs so klein ist, daß wir sie nicht mehr anzugeben vermögen, wie bei einem Schlage oder Stoße. Eine Kraft, welche während der ganzen Dauer ihrer Thätigkeit keinen Augenblick ihre Intensität ändert, heißt constant.

§ 101. Lehrs. Eine Einzelkraft kann nur eine geradlinige Bewegung hervorbringen.

Denn wird ein Punkt von einer Kraft in Bewegung gesetzt, so erfolgt der Antrieb zur Bewegung nur in bestimmter Richtung, also nothwendig in einer Geraden, welche der Punkt nach dem Gesetze der Trägheit so lange beschreiben muß, bis er durch eine äußere Ursache daran gehindert wird. Nach demselben Gesetze erfolgt die Bewegung von dem Augenblicke an gleichförmig, als die Kraft zu wirken aufhört. Hört die Kraft schon im ersten Augenblicke der Bewegung zu wirken auf, so ist die ganze Bewegung gleichförmig, jedoch immer geradlinig.

§ 102. Lehrs. Eine constante Kraft erzeugt stets eine gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Bew. Erlangt der bewegte Punkt am Ende der ersten Sekunde die Geschwindigkeit = a, so müßte er sich nach dem Gesetze der Trägheit mit dieser Geschwindigkeit gleichförmig fortbewegen, wenn die Kraft zu wirken aufhörte. Die Kraft wirkt aber mit gleicher Intensität auch während der zweiten Sekunde, und muß daher dieselbe Geschwindigkeit a erzeugen, wie in der

ersten Sekunde. Desgleichen muß die Kraft aus demselben Grunde in jeder folgenden Sekunde eine neue Geschwindigkeit = a erzeugen, gerade so, als wenn noch keine Geschwindigkeit vorausginge. Die Geschwindigkeit des Punktes nimmt daher in jeder Sekunde um die constante Größe a zu, folglich ist die Bewegung gleichförmig beschleunigt.

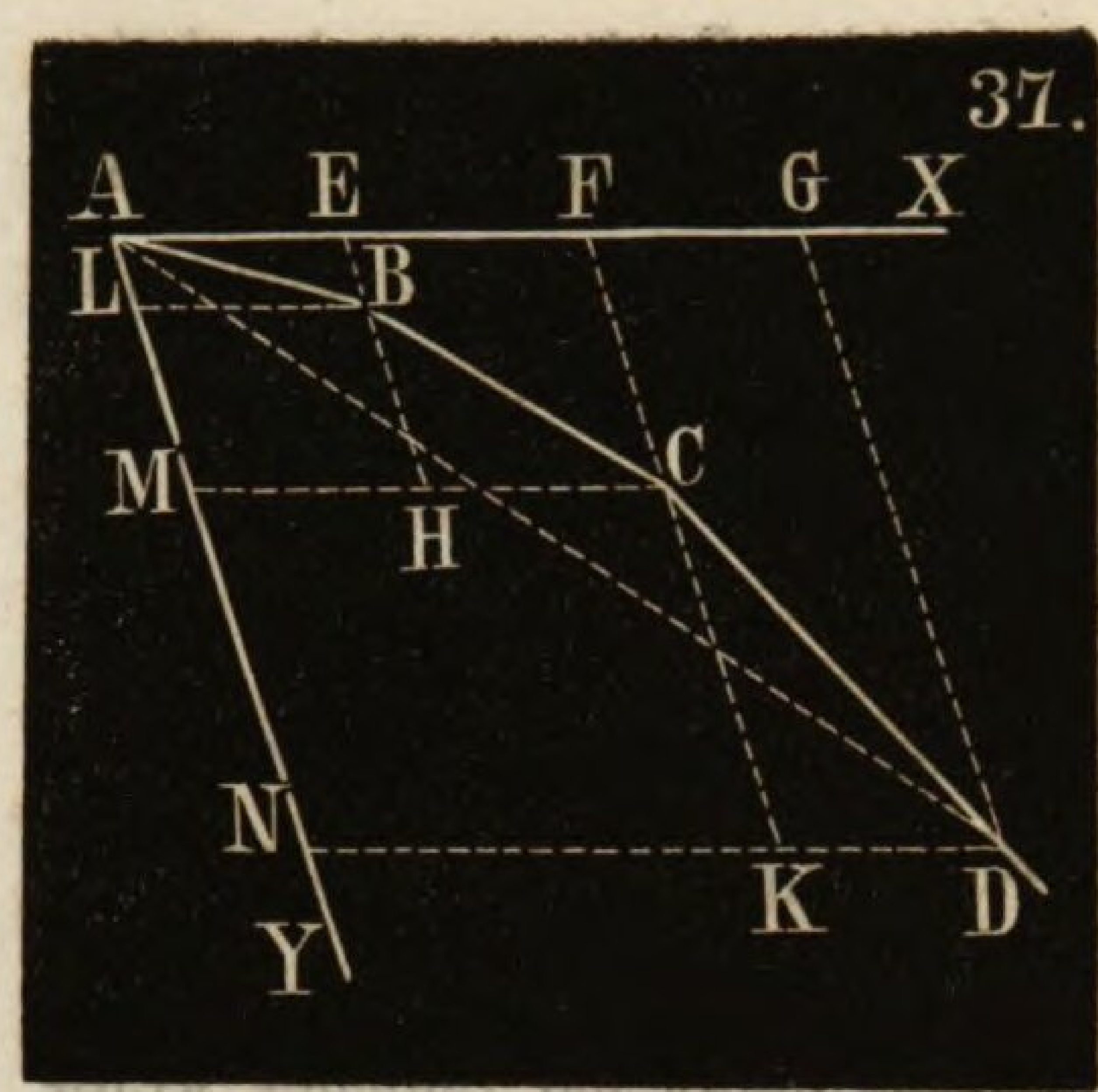
§ 103. Zus. Bewegt sich umgekehrt ein Punkt geradlinig mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit, so steht er unter dem Einflusse einer constanten Kraft.

Anm. In der Technik und Industrie finden wir constante Kräfte, wie die Spannkraft des Dampfes, einer gespannten Feder, die Druckkraft des Wassers, die Kraft der Zugthiere u. s. w., welche keine beschleunigte Bewegung erzeugen. Die Ursache hievon liegt aber nicht in der Intensität der Kräfte, sondern in der continuirlichen Gegenwirkung der zu überwindenden Hindernisse.

§ 104. Zus. Ist die Kraft nicht constant, aber stetig wirkend (wie in den meisten Fällen der Natur), so ist die Bewegung gleichfalls beschleunigt, die Beschleunigung jedoch nicht mehr gleichbleibend, sondern veränderlich.

§ 105. Lehrs. Wird ein Punkt von zwei Kräften in Bewegung gesetzt, so kann die Bahn sowohl gerad- als krummlinig sein.

Bew. Nach dem Kräfteparallelogramm können nicht bloß zwei Kräfte durch ihre Resultante ersetzt werden, sondern es kann auch jede Einzelkraft in zwei Kräfte zerlegt werden. Da aber jede Kraft durch ihre Wirkung gemessen wird, so kann auch die erzeugte Bewegung für die Kraft gesetzt werden. Es können daher Bewegungen ebenso, wie Kräfte zusammengesetzt und zerlegt werden. Da nun jede Einzelkraft nur eine geradlinige Bewegung erzeugen kann, so wird die eine Kraft den Punkt A (Fig. 37) in der Geraden AX und die andere in der Geraden AY zu bewegen streben. Gesetzt der Punkt gelange längs AX in der ersten Sekunde nach E, in der zweiten nach F, in der dritten nach G u. s. w., dagegen längs AY beziehungsweise nach



L, M, N u. s. w., so ist die resultirende Bewegung des Punktes in der ersten Sekunde von A nach B, in der zweiten von B nach C, in der dritten von C nach D u. s. w. Die Bahn ABCD ist eine Gerade, wenn die Dreiecke ALB, BHC, CKD ähnlich sind, oder wenn

AL : BH : CK = BL : CH : DK oder
AL : LM : MN = AE : EF : FG stattfindet;

außerdem ist sie krummlinig*). In der Figur ist die Bahn zwar ein Polygon; dieses liegt aber nicht im Wesen der Bewegung, sondern in der willkürlichen Zeiteintheilung. Nehmen wir kleinere Zeitintervalle, so werden auch die Seiten kleiner, und wir können auf diese Weise der wahren Gestalt der Bahn unbegrenzt nahe kommen. Zugleich erhellt, daß die Bahn stets in der Ebene der Kräfte XAY liegen muß.

§ 106. Zus. Beschreibt ein Punkt eine krummlinige Bahn, so hat er in jedem Punkte derselben eine andere Richtung. Denken wir uns die Thätigkeit der Kräfte an der Stelle D der Bahn plötzlich aufgehoben, so müßte der Punkt mit der letzten Geschwindigkeit sich gleichförmig fortbewegen und die Richtung beibehalten, welche er in D innegehabt hat, d. h. er müßte eine Gerade beschreiben, welche die Bahn in D berührt. Aus diesem Grunde fällt an jeder Stelle der Bahn die Richtung des bewegten Punktes mit der Tangente der Bahn zusammen.

---

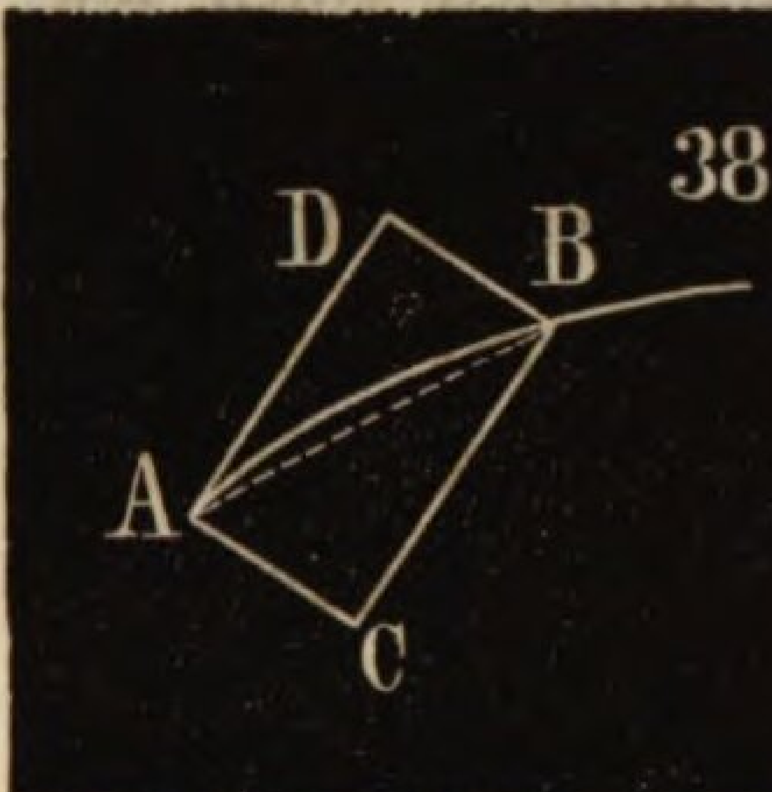
*) Diese Deduktion ist andrerseits eine nothwendige Folge eines Erfahrungssatzes, welcher gleich dem Gesetze der Trägheit in der Mechanik allgemein als Grundsatz gilt und sich so fassen läßt: Die Wirkung einer Kraft auf einen Punkt bleibt dieselbe, ob der Punkt in Ruhe oder Bewegung ist; oder mit andern Worten: Wird ein Punkt gleichzeitig von zwei Kräften in Bewegung gesetzt, so kommt jede einzelne Bewegung ebenso zur vollen Geltung, als wenn die andere nicht vorhanden wäre.

§ 107. Zus. Wir können nicht bloß die zwei Kräften enſprechende Bahn, sondern auch die Beschleunigung und Geschwindigkeit der Bewegung für jede Zeitdauer ableiten. Dabei heißen wir die Geschwindigkeiten in den Geraden AX und AY die Seitengeschwindigkeiten, dagegen die in der Bahn ABCD die Bahngeschwindigkeit. Sind die zwei Kräfte constant, so ist die Bewegung sowohl in AX und AY, als auch in der Bahn eine beschleunigte. Die Größe der Beschleunigung ist beziehungsweise (§ 99) durch 2AE, 2AL, 2AB dargestellt; die Geschwindigkeit v der Bahn ist nach t Sekunden

$$v = 2AB.t$$

und die Länge der Bahn ist ausgedrückt durch

$$s = ABt^2 \text{ *)}.$$



38.

§ 108. Zus. Ist umgekehrt die Bahn und Geschwindigkeit eines Punktes gegeben, so läßt sich die in jedem Punkte der Bahn stattfindende Geschwindigkeit v beliebig in zwei Seitengeschwindigkeiten zerlegen und auch durch sie ersetzen. Gewöhnlich wählt man zu Richtungen die Tangente und die im Berührungspunkte darauf Senkrechte (Normale). Bewegt sich z. B. der Punkt A (Fig. 38) in einer gegebenen Zeit nach B, und ist AD Tangente in A und ABCD ein Rechteck, so können wir uns vorstellen, eine Kraft bewege den Punkt in derselben Zeit von A nach C und eine zweite gleichzeitig von A nach D. Dann ist AB die resultirende Bewegung der Größe und Richtung nach. Zugleich ist 2AC die normale und 2AD die tangentiale Beschleunigung **) im Punkte A der Bahn AB, wenn AB der in der Zeiteinheit beschriebene Weg ist. Selbstverständlich fällt der Bogen AB nur näherungs-

---

*) Diese Gleichung verliert ihre Giltigkeit, sobald die Bewegung ungleichförmig beschleunigt ist.

**) Die Bewegung AD kann auch gleichförmig sein, wie es bei jeder Centralbewegung bei constanter Centralkraft der Fall ist.

weise mit der Diagonale des Rechteckes zusammen. Der Grad der Näherung hängt von der Kleinheit der Zeit ab, welche der Punkt von A bis B braucht.

§ 109. Erkl. Um auch die Masse eines bewegten Punktes oder Körpers mit in Rechnung zu bringen, unterscheiden wir zweierlei Kräfte und heißen die Kraft, welche die Masse m in Bewegung setzt, bewegende Kraft, dagegen die Kraft, welche die Masseneinheit zur Bewegung antreibt, beschleunigende Kraft. Die erstere bezeichnen wir wie bisher mit P, die letztere mit k.

§ 110. Lehrs. Die bewegende Kraft ist gleich dem Produkte aus der Masse und der beschleunigenden Kraft; also

$$P = m.k.$$

Bew. Denken wir uns unter der Masseneinheit einen materiellen Punkt, welcher von der Kraft k mit der Beschleunigung a zur Bewegung angetrieben wird, so können wir uns vorstellen, es bewege sich in paralleler Richtung neben ihm ein zweiter Punkt mit gleicher Masse und Geschwindigkeit. Dann wird er nothwendig von einer gleichen Kraft k angetrieben. Der Zustand der Bewegung bleibt nun ganz der nämliche, wenn wir in Gedanken die zwei Punkte in einen vereinigen und die Summe der Kräfte = 2k im gemeinschaftlichen Schwerpunkt angreifen lassen. Auf dieselbe Weise können wir auch m Punkte, von denen jeder von einer Kraft = k angetrieben wird, vereinigt denken. Die Kraft, welche im gemeinschaftlichen Schwerpunkt der vereinigten Masse m angreift und ihr die Beschleunigung a ertheilt, ist in diesem Falle = mk. Mithin muß auch die bewegende Kraft P = mk sein, wenn sie dieselbe Beschleunigung a hervorbringen soll.

§ 111. Zus. Erlangt umgekehrt die Masse m durch die Kraft P die Beschleunigung a, so ist die Kraft k, welche die Masseneinheit mit derselben Beschleunigung in Bewegung setzt, ausgedrückt durch

$$k = \frac{P}{m}.$$

§ 112. Lehrs. Wird die Masseneinheit von zwei ungleichen Kräften angegriffen, so erzeugt jede für sich eine Beschleunigung, welche sich verhalten, wie die Kräfte; d. h.

$$a : a_1 = k : k_1.$$

Bew. Da wir die Kräfte überhaupt nur aus ihren Wirkungen kennen, so ist es ein ausgemachter Grundsatz, daß jede Kraft ihrer Wirkung, also hier ihrer Beschleunigung, proportional ist. Setzen wir das Verhältniß $k : a = q$, oder was dasselbe ist, $k = aq$, so ist aus demselben Grunde die zweite Kraft $k_1 = a_1 q$; mithin

$$k : k_1 = aq : a_1 q, \text{ oder}$$
$$k : k_1 = a : a_1.$$

§ 113. Zus. Verstehen wir unter k_1 die Einheit der Kraft, und unter a_1 die Einheit der Geschwindigkeit (deren Werthe später genauer angegeben werden), so folgt aus der vorigen Proportion

$$k = a \text{ d. h.}$$

die Beschleunigung ist dem Werthe nach einerlei mit der beschleunigenden Kraft.

§ 114. Zus. Mit Rücksicht auf § 111 haben wir jetzt als Ausdruck der Beschleunigung

$$(1)\ a = \frac{P}{m}, \text{ oder wegen } m = \frac{G}{g} \text{ § 66}$$

$$(2)\ a = g.\frac{P}{G}.$$

§ 115. Zus. Aus $P = mk$ und $a = k$ folgt weiter

$$P = ma = \frac{mat}{t},$$

oder auch wegen $v = at$ nach § 94

$$(1)\ P = \frac{mv}{t}; \text{ oder } P.t = mv.$$

Eliminiren wir t vermöge der Gleichung $s = \frac{1}{2} vt$ in § 97, so folgt noch

$$(2)\ P = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{s}; \text{ oder } P.s = \frac{1}{2} mv^2.$$

Beide in (1) und (2) verzeichneten Ausdrücke haben nicht bloß wegen ihres Ursprungs, sondern auch wegen ihrer vielseitigen Anwendbarkeit eine ganz besondere Bedeutung. Der Ausdruck mv heiß nach Galilei Quantität der Bewegung und gibt die Größe der Kraft für eine bestimmte Zeit; mv^2 heißt nach Leibnitz lebendige Kraft, $\frac{1}{2}mv^2$ nach Belanger lebendige Potenz und mißt die Kraft für einen gegebenen Weg; endlich heißt P.s nach Coriolis die Arbeit der Kraft. (Vergl. § 124.)

§ 116. Lehrs. Haben zwei ungleiche Massen gleiche Bewegung, so verhalten sich die bewegenden Kräfte wie die Massen.

Bew. Werden die Massen m und m_1 von den Kräften P und P_1 in Bewegung gesetzt, so haben wir für dieselbe Zeit t nach § 115 (1)

$$P.t = mv \text{ und } P_1.t = m_1v; \text{ mithin}$$

$$Pt : P_1t = mv : m_1v, \text{ oder}$$

$$P : P_1 = m : m_1.$$

§ 117. Lehrs. Werden zwei ungleiche Massen von zwei gleichen Kräften in Bewegung gesetzt, so verhalten sich die in gleichen Zeiten erlangten Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Massen; oder mit andern Worten: Eine constante Kraft bringt in der kleineren Masse die größere Geschwindigkeit hervor.

Bew. Wir haben, wie vorhin

$$Pt : P_1t = mv : m_1v_1;$$

oder auch weil nach der Voraussetzung $P = P_1$ ist

$$mv = m_1v_1; \text{ also } m : m_1 = v_1 : v.$$

§ 118. **Wirkungen der Schwere.** Vielfältige Versuche mit frei fallenden Körpern bestätigen folgende zwei Thatsachen:

1) Alle Körper fallen von gleichen Höhen mit gleicher Geschwindigkeit;
2) die Zunahme der Geschwindigkeit ist für gleiche Zeiten unveränderlich und stets proportional der Zeit.

Auf Grund dieser Thatsachen werden wir zu folgenden Schlüssen gezwungen:

1) die Anziehungskraft der Erde ist der Masse der fallenden Körper proportional nach § 116;

2) die Schwerkraft ist eine constante*) Kraft nach § 103 und mithin gelten für frei fallende Körper die in § 94 und 97 entwickelten Bewegungsgesetze.

§ 119. **Beschleunigung der Schwere.** Die Beschleunigung d. i. die Geschwindigkeit, welche ein frei fallender Körper von der Ruhe ausgehend am Ende der 1. Sekunde erreicht, wird allgemein mit g (gravitas) bezeichnet. Dieselbe ist im Allgemeinen veränderlich und nur an Orten unter demselben Breitegrad und in Höhen unter 100 Fuß gleich; kann aber für jeden Breitegrad der Erdoberfläche berechnet werden, wenn sie für einen Ort genau ermittelt ist. Nach Beobachtungen im luftleeren Raum wurde für Paris gefunden

$$g = 9{,}80896 \text{ Meter} = 33{,}609 \text{ b. Fuß}$$ **).

§ 120. Fallgesetze. Schreiben wir in den Gleichungen des § 94 und 97 g anstatt a, so haben wir als Gesetze der Fallbewegung

$$(1)\ v = gt$$

$$(2)\ s = \tfrac{1}{2} gt^2.$$

Durch Elimination von t aus beiden Gleichungen folgt

$$(3)\ v = \sqrt{2sg}.$$

Für die Fallräume s und s_1, welche den Zeiten t und t_1 entsprechen, haben wir

$$s : s_1 = \tfrac{1}{2} gt^2 : \tfrac{1}{2} gt_1^2, \text{ oder}$$

$$(4)\ s : s_1 = t^2 : t_1^2 \text{ d. h.}$$

---

*) Wenn die Schwere eine constante Kraft ist, so sollten wir nach § 117 mit Galilei erwarten, daß der kleinere Körper schneller falle, als der größere; wie erklärt sich dieser Widerspruch?

**) Die Beschleunigung g ist mit der Masseneinheit g in § 66 der Größe nach identisch.

die Fallräume verhalten sich, wie die Quadrate der Zeiten. Für $t = 1$ folgt aus (2)

$$(5)\quad s = \tfrac{1}{2} g = 16{,}804 \text{ Fuß, d. h.}$$

so tief fällt jeder Körper während der ersten Sekunde.

§ 121. **Maaßeinheit der Kraft und Geschwindigkeit.** In der Statik haben wir gefunden, daß das Gewicht eines Körpers der Anziehungskraft der Erde gleich ist. Das Nämliche gilt für die Bewegung im freien Fall. Denn lassen wir die Masse m, deren Gewicht $= G$ sei, während 1 Sekunde frei herabfallen, so erreicht der Körper die Geschwindigkeit $v = g$, und wir haben einerseits

$$P = mg$$

als Quantität der Bewegung (§ 115); andrerseits nach § 66

$$mg = G;$$

mithin $P = G$. Die bewegende Kraft, welche von der Schwere herrührt, ist daher unter allen Umständen gleich dem Gewichte der angezogenen Masse. Aus diesem und anderen Gründen empfiehlt sich das Gewicht als das natürlichste Mittel, die Intensität der Kräfte überhaupt zu messen. Die Einheit des Gewichtes ist auch Einheit der Kraft; also $k = 1$ ℔. Wählen wir noch den Fuß als Maaßeinheit der Geschwindigkeit, setzen also $a = 1$ Fuß, so haben wir ein vollständiges Maaßsystem für alle Fragen der Mechanik. Im Sinne des § 113 ist nun auch $k = a$. Hinsichtlich der Masseneinheit $g = 33{,}609$ ℔, welche zunächst von der Krafteinheit abhängig ist, entsteht die Frage, ob sie mit den übrigen Maaßeinheiten noch verträglich ist.

§ 122. **Maaßeinheit der Masse.** Bezeichnen wir das Gewicht der fraglichen Masse vorerst mit G, so muß es so beschaffen sein, daß ihm die Kraft $k = 1$ ℔ die Beschleunigung $a = 1'$ mittheilt. In Berücksichtigung, daß $t = 1''$ ist, haben wir nach § 114 als allgemein giltig für jede Masse

$$a = \frac{P}{m} \text{ und } m = \frac{G}{g}; \text{ mithin}$$

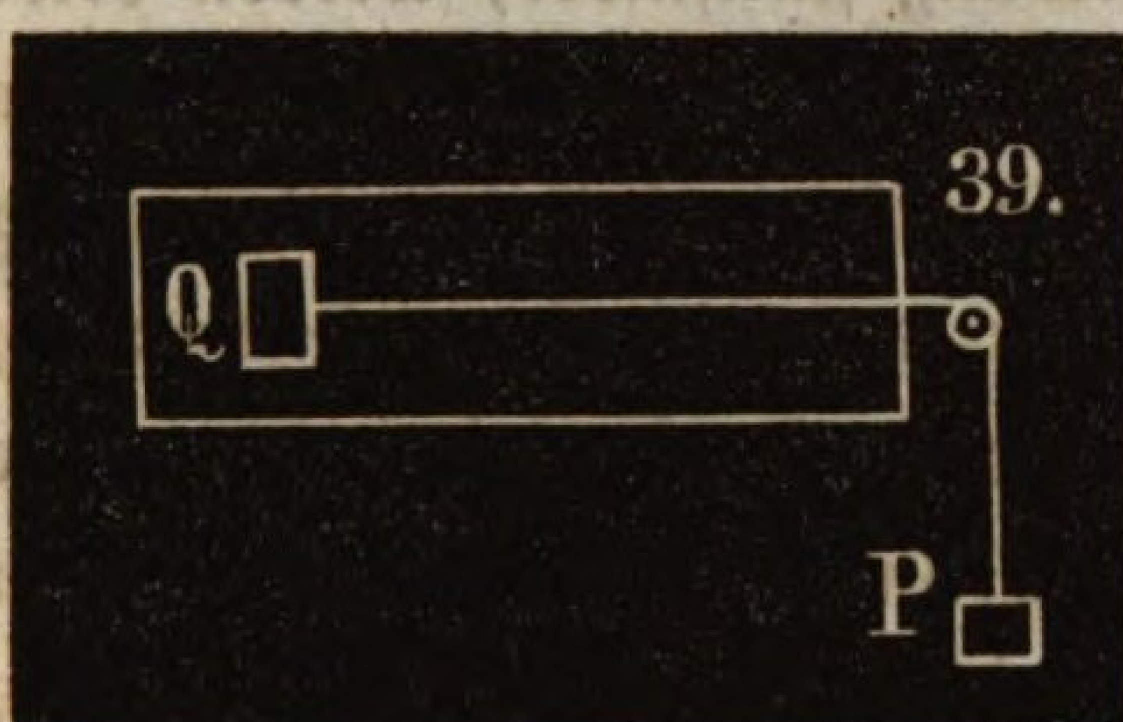
$$a = g.\frac{P}{G}.$$

Weil aber $a = 1$ und $P = k = 1$ für die Masseneinheit gesetzt werden muß, so folgt hieraus

$$1 = \frac{g}{G}; \text{ oder } G = g.\text{*)}$$

Die Masseneinheit ist demnach dieselbe wie früher.

§ 123. Nachweis durch Versuche. Die vorige Erörterung setzt voraus, daß es möglich sei, der Masseneinheit g eine Beschleunigung $a = 1$ Fuß mitzutheilen. Im freien Falle ist dieß unmöglich, weil jeder fallende Körper eine Beschleunigung $a = g = 33{,}6'$ erlangt. Dagegen kann diese Absicht durch mancherlei künstliche Mittel erreicht und zugleich die Richtigkeit der aufgestellten Lehrsätze erprobt werden.



I. Versuch. Auf einer horizontalen glatten Ebene (Fig. 39) befinde sich ein schwerer Körper von Q ℔; über eine leichtbewegliche Rolle in A sei ein gewichtsloser Faden geführt, welcher das freihängende Gewicht P mit Q verbindet. Denken wir uns jeden Widerstand der Reibung aufgehoben, so muß unter allen Umständen eine Bewegung eintreten.

Welches ist nun die Beschleunigung a und der Weg s, welcher der Zeit t entspricht?

Beide Körper werden von der Schwerkraft mit einer Intensität gleich ihren Gewichten angezogen. Die in Q thätige Kraft wird durch den Widerstand der Unterlage aufgehoben, so daß nur die Kraft in P allein übrig bleibt, die Massen von P und Q zusammen in Bewegung zu setzen. Nun ist aber nach § 114 die Beschleunigung

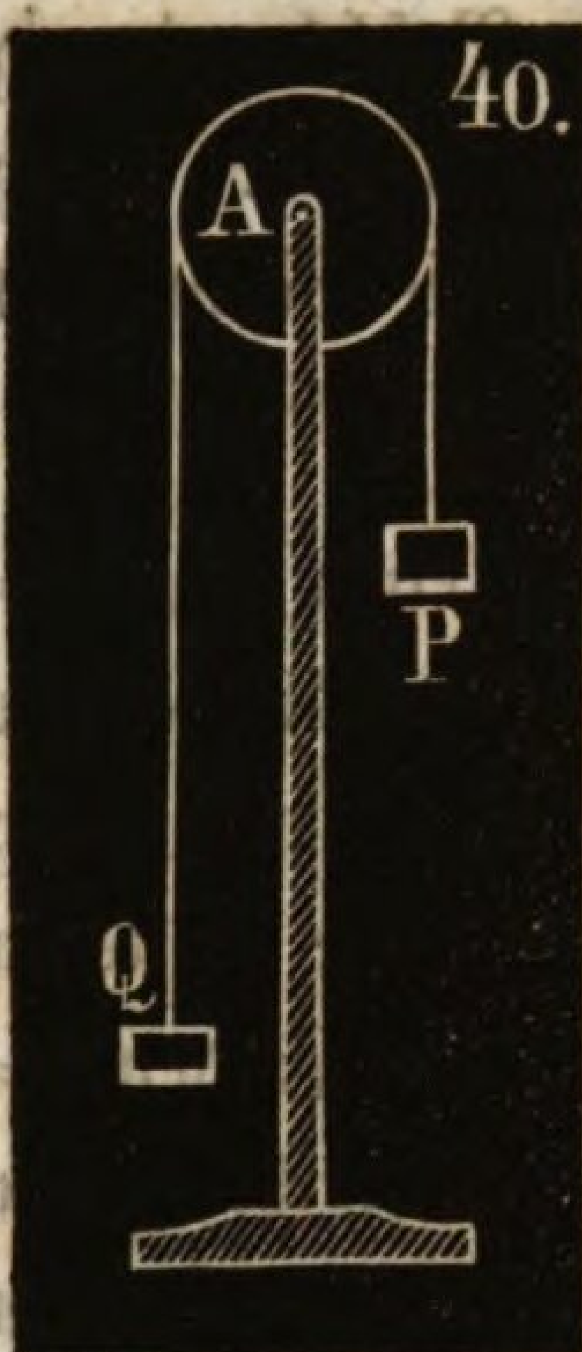
---

*) Die Zahl g hat in der Mechanik eine dreifache Bedeutung; 1) bedeutet g ℔ die Masseneinheit, 2) die beschleunigende Kraft der Schwere, 3) g Fuß die Beschleunigung der Schwerkraft.

$$a = g \cdot \frac{P}{G}; \text{ mithin wegen } G = P + Q$$

$$(1)\ a = g \frac{P}{P+Q}; \text{ und } (2)\ s = \tfrac{1}{2} at^2 = \tfrac{1}{2} g \frac{P}{P+Q} t^2.$$

Den Weg, welchen Q in einer gegebenen Zeit t zurücklegt, kann man direkt der Beobachtung entnehmen und damit das Resultat der Rechnung vergleichen. Wählt man speziell $t = 1$, $P = 1$ und $P + Q = g$ ℔, so wird sich zeigen, ob die Beschleunigung $a = 1'$ oder $s = \frac{1}{2}'$ erreicht wird.



II. Versuch). Ueber eine leicht bewegliche vertikale Rolle in A (Fig. 40) sei ein gewichtsloser Faden geführt, welcher an seinen Enden die Gewichte P und Q trage. Im Falle kein Widerstand der Reibung stattfindet, werden beide Gewichte nur dann in Ruhe bleiben, wenn $P = Q$ ist; in jedem andern Fall tritt Bewegung ein. Um nun hier a und s zu bestimmen, haben wir in P und Q Kräfte wirksam, welche den Gewichten gleich und in Beziehung auf den Drehungspunkt A einander entgegengesetzt sind. Nehmen wir $P > Q$, so ist ihre Resultante $R = P - Q$, welche Kraft beide Gewichte in Bewegung zu setzen hat. Wir haben daher $G = P + Q$ und $P = R$ in der allgemeinen Formel des § 114 zu setzen wie oben und erhalten

$$(3)\ a = g \cdot \frac{R}{P+Q} = g \cdot \frac{P-Q}{P+Q}$$

und somit auch für den in der Zeit t zurückgelegten Weg

$$(4)\ s = \tfrac{1}{2} at^2 = \tfrac{1}{2} g \frac{P-Q}{P+Q} t^2.$$

Durch geschickte Wahl der Gewichte P und Q kann man jede Beschleunigung zwischen o und g hervorbringen und auf diese Weise die aufgestellten Bewegungsgesetze bis ins Einzelne erproben. Eine sorgfältig eingerichtete Maschine dieser Art ist die Atwood'sche Fallmaschine, deren Resultate mit den Ergebnissen der Formeln (3) und (4) zu vergleichen sind.

Als dritte Versuchsart bietet sich die Fallbewegung über die schiefe Ebene dar. Durch Aenderung des Neigungswinkels erreicht der fallende Körper jedesmal eine andere Beschleunigung.

§ 124. Arbeit der Kraft. Bringt eine constante Kraft eine beschleunigte Bewegung hervor, so sind wir durch das Vorausgehende in den Stand gesetzt, ihre Intensität zu bestimmen und umgekehrt aus der Intensität der Kraft die Größe der Bewegung abzuleiten. In der Technik und Industrie dagegen verrichten die Kräfte durch Ziehen und Heben von Lasten und Ueberwinden von Hindernissen der Bewegung stets nur eine Arbeit. Wir sind nun genöthigt, die bewegende Kraft P von ihrer Leistung, oder mechanischen Arbeit A ausdrücklich zu unterscheiden. Man ist übereingekommen als Einheit der Arbeitsleistung diejenige Kraft anzunehmen, welche erforderlich ist, die Last gleich der Gewichtseinheit (= 1 ℔) in 1 Sek. 1 Fuß hoch zu heben, und nennt sie 1 Fußpfund; 500 Fußpfund nennt man 1 Pferdekraft, weil man annimmt, daß ein mittleres Pferd in 1 Sek. 500 ℔ 1 Fuß hoch heben kann. Soll eine Last = Q ℔ auf eine Höhe = s′ gehoben werden, so ist die hiezu erforderliche Arbeit ausgedrückt durch

$$(1) \quad A = Q.s \text{ Fußpfund} = \frac{Q.s}{500} \text{ Pferdekräfte.}$$

Verstehen wir unter Q nicht bloß die zu hebende Last, sondern allgemein den zu überwindenden Widerstand, so haben wir aus § 115

$$P.s = \tfrac{1}{2} mv^2, \text{ oder } P.s = \tfrac{1}{2} \frac{Q}{g} v^2.$$

In Rücksicht auf $v^2 = 2sg$ § 120 (3) folgt hieraus

$$(2) \quad P = Q \text{ d. h.}$$

die gehobene Last ist gleich der bewegenden Kraft; oder allgemeiner aufgefaßt: „Wirkung und Gegenwirkung sind stets einander gleich“.

Vermöge Gl. (2) haben wir einerseits

$$(3)\ A = P.s\ ^{*)};\ \text{andrerseits}$$

$$(4)\ A = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2\ \text{d. h.}$$

die mechanische Arbeit einer Kraft ist gleich ihrer lebendigen Potenz (§ 115).

Zus. Durch Elimination der Beschleunigung a aus den bekannten Gleichungen

$$s = \tfrac{1}{2}at^2 \text{ und } P = ma$$

erhalten wir $2ms = P.t^2$.

Lassen wir dieselbe Masse m von einer zweiten Kraft P_1 in der Zeit t_1 denselben Weg s befördern, so ist gleichfalls

$$2ms = P_1.t_1^2;\ \text{mithin}$$

$$Pt^2 = P_1t_1^2;\ \text{oder } P : P_1 = t_1^2 : t^2\ \text{d. h.}$$

Kräfte, welche dieselbe Arbeit in verschiedenen Zeiten verrichten, verhalten sich umgekehrt, wie die Quadrate der Arbeitszeiten.

§ 125. Schlußbemerkung. Wie schon erwähnt, kann man in der Mechanik doppelt verfahren, entweder die Kräfte aus der Bahn oder die Bahn aus den Kräften ermitteln. Ein Beispiel dieser Art bietet uns die Planetenbewegung. Durch langjährige Beobachtung Kepler's wurden für die Planeten Bahn, Geschwindigkeit und Umlaufszeit festgestellt, und erst später aus den Thatsachen der Bewegung das Gravitationsgesetz durch Newton abgeleitet. Aber auch umgekehrt kann die Mechanik aus dem Gravitationsgesetze alle Erscheinungen der Bewegung entwickeln. Nach diesem Gesetze ziehen sich alle materiellen Körper mit einer Intensität an, welche den Massen direkt und dem Quadrat ihrer Entfernungen umgekehrt proportional ist. Ist nun r die Entfernung, M und m die Masse zweier Körper, so haben wir als Ausdruck der anziehenden Kraft für alle Körper

---

*) Man sieht hieraus den Grund, warum das Produkt P.s „Arbeit der Kraft“ genannt wird.

$$P = q.\frac{M.m}{r^2},$$

wobei q eine constante und nur von der Entfernungs-Einheit abhängige Zahl bedeutet.

Drittes Capitel.

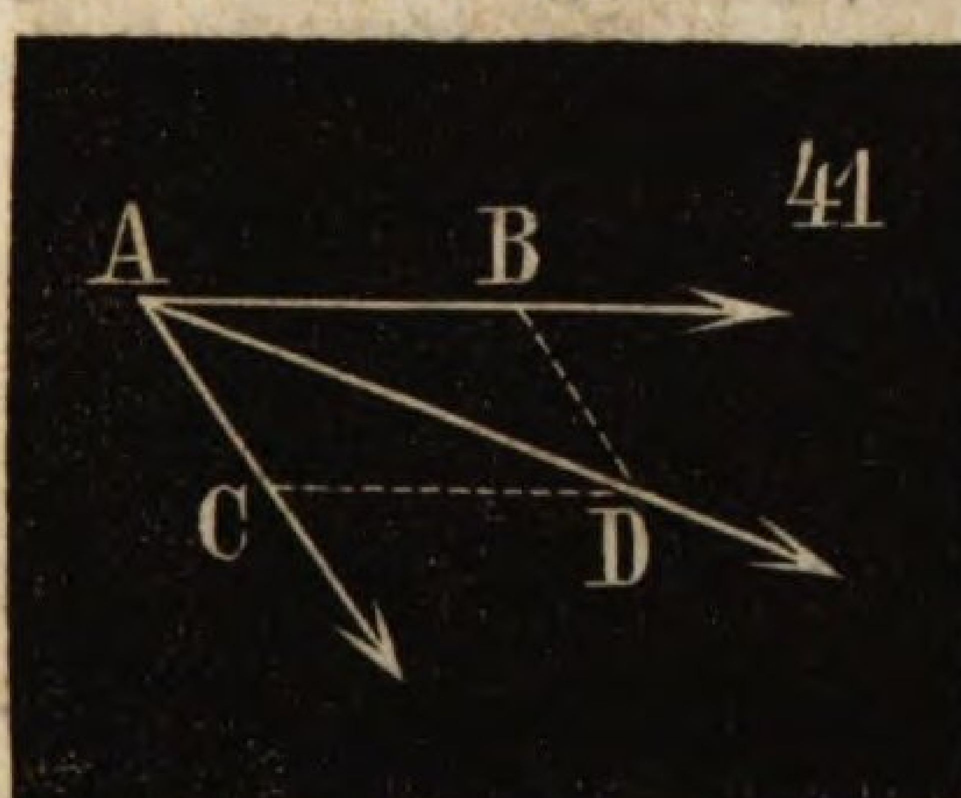
Beispiele von Bewegungen.

§ 126. Geradlinige Bewegung mit constanter Geschwindigkeit. Ein Punkt A werde von zwei Kräften in Bewegung gesetzt, und zwar von der einen mit der constanten Geschwindigkeit v und von der andern mit der constanten Geschwindigkeit v_1.

In diesem Falle ist unter allen Umständen die Bewegung gleichförmig und die Bahn geradlinig. Wirken die Kräfte in derselben Geraden, so fällt die Bahn in die Richtung der beiden Kräfte und der Punkt beschreibt in der Zeit t einen Weg

(1) $s = vt + v_1 t = (v + v_1) t$; oder

(2) $s = vt - v_1 t = (v - v_1) t$ (§ 105),



je nachdem die Kräfte in derselben oder in entgegengesetzter Richtung thätig sind.

Wirken die Kräfte unter einem Winkel α und ist (Fig. 41) $AB = v$, $AC = v_1$, so bewegt sich der Punkt in der Diagonale AD des aus v, v_1 und α construirten Parallelogramms ABCD mit einer Geschwindigkeit

(3) $AD = \sqrt{v^2 + v_1^2 + 2vv_1 \cos\alpha}$

und beschreibt in der Zeit t einen Weg

(4) $s = AD.t.$

§ 127. Geradlinig beschleunigte Bewegung. Setzt die constante Kraft P_1 einen Punkt von der Masse m in Bewegung, so ist Beschleunigung und Weg durch

$$a_1 = \frac{P_1}{m}; \; s_1 = \tfrac{1}{2}\frac{P_1}{m}t^2$$

ausgedrückt. Analog haben wir für eine zweite Kraft P_2 und dieselbe Masse m und Zeit t

$$a_2 = \frac{P_2}{m};\ s_2 = \tfrac{1}{2}\frac{P_2}{m}t^2.$$

Lassen wir beide Kräfte zugleich und in derselben Geraden auf m wirken, so wird der Punkt von ihrer Resultante $R = P_1 \pm P_2$ mit einer Beschleunigung

$$(1)\ a = \frac{P_1 \pm P_2}{m} = \frac{P_1}{m} \pm \frac{P_2}{m}$$

zu einer geradlinigen Bewegung angetrieben und wir haben als Ausdruck des Weges für die Zeit t

$$(2)\ s = \tfrac{1}{2}\frac{P_1 \pm P_2}{m}t_2 = \tfrac{1}{2}\frac{P_1}{m}t^2 \pm \tfrac{1}{2}\frac{P_2}{m}t^2.$$

Mit Rücksicht auf das Vorausgehende haben wir aus (1)

$a = a_1 \pm a_2$; oder $at = a_1 t \pm a_2 t$, d. i.

(3) $v = v_1 \pm v_2$; endlich aus (2)

(4) $s = s_1 \pm s_2$; d. h.

bei jeder geradlinigen Bewegung ist Geschwindigkeit und Weg gleich der algebraischen Summe der Geschwindigkeiten und Wege, welche jede Kraft einzeln hervorbringt*).

Bezeichnen wir z. B. mit P_1 die Dampfkraft einer Lokomotive, mit P_2 den Widerstand der Reibung, so hat der Zug beim Losfahren eine Geschwindigkeit = o und nach der Zeit t einen Zuwachs $= v_1$, so lange $P_1 > P_2$ ist. Ist endlich $P_1 = P_2$ geworden, so geht der Zug mit der constanten Geschwindigkeit v_1 fort und legt von da an einen Weg $s = v_1 t$ zurück **). Wird der Dampf abgesperrt, so tritt von diesem

---

*) Dieser wegen seiner vielseitigen Anwendbarkeit wichtige Satz steht in innigster Beziehung zu § 105.

**) Gehen wir umgekehrt von der allgemein giltigen Gleichung $(P_1 - P_2)\,t = mv$ aus und lassen v constant werden, so besteht die Gleichung auch noch für $t = \infty$; dann folgt $P_1 - P_2 = o$, oder $P_1 = P_2$, d. i. die bewegende Kraft ist gleich der Reibung, was bei jeder constanten Bewegung mit Hindernissen gilt.

Augenblick an eine gleichförmig verzögerte Bewegung durch den constanten Widerstand P_2 ein, welche nach dem Vorhergehenden durch die zwei Gleichungen

$$(5)\quad v = v_1 - \frac{P_2}{m} t, \text{ und}$$

$$(6)\quad s = v_1 t - \tfrac{1}{2} \frac{P_2}{m} t^2$$

charakterisirt ist, wenn v die allmälig abnehmende Geschwindigkeit des Zuges bedeutet. Der Zug gelangt zur Ruhe, wenn $v = o$, oder wenn

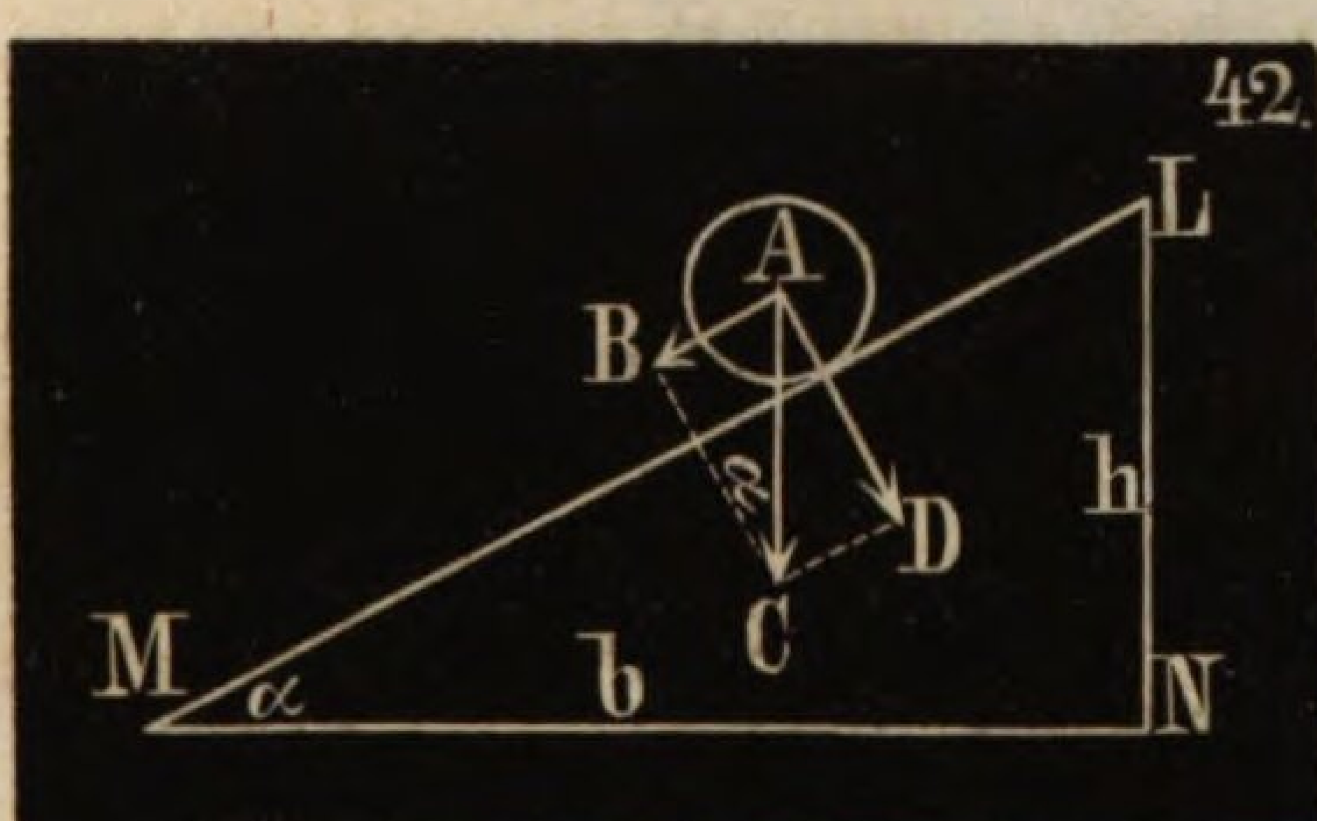
$$t = \frac{m v_1}{P_2}, \text{ und mithin aus (6)}$$

$$s = \tfrac{1}{2} \frac{m v_1^2}{P_2} \text{ geworden ist.}$$

Aus diesen zwei Gleichungen erhalten wir einerseits

$$P_2 t = m v_1, \text{ und } P_2 s = \tfrac{1}{2} m v_1^2 \text{ d. h.}$$

die mechanische Arbeit des Reibungswiderstandes ist gleich der lebendigen Potenz der Dampfkraft; andrerseits $P_2 = P_1$. Vergl. § 115 und 124.



§ 128. Fallbewegung über eine schiefe Ebene. Befindet sich ein schwerer Punkt vom Gewichte Q in A auf der schiefen Ebene LM (Fig. 42), deren Neigung $= \alpha$, so ist er der Wirkung der Schwerkraft unterworfen, welche ihn in der vertikalen Richtung AC mit einer Intensität $= Q$ zu bewegen strebt. Zerlegen wir AC in die rechtwinkeligen Componenten AB und AD, so wird AD durch den Widerstand der Ebene aufgehoben und die constante Kraft

$$AB = Q \sin \alpha$$

setzt den Punkt allein in Bewegung in der Richtung AB ∥ LM. Nun haben wir nach § 114 allgemein als Ausdruck der Beschleunigung

$$a = g . \frac{P}{G},$$

worin $P = Q \sin \alpha$ und $G = Q$ zu setzen ist. Vermöge dieser Werthe ist nun

$$(1)\ a = g \frac{Q \sin \alpha}{Q} = g \sin \alpha \text{ d. h.}$$

die Beschleunigung ist unabhängig vom Gewichte des fallenden Körpers und ändert sich in gleichem Sinne mit α. Aus der Beschleunigung ergibt sich sofort

$$(2)\ v = at = gt \sin \alpha$$

$$(3)\ s = \tfrac{1}{2} at^2 = \tfrac{1}{2} gt^2 \sin \alpha.$$

Ist der Punkt in L anstatt in A, so ist $s = LM$ zu setzen. Bezeichnen wir, wie früher, die Höhe mit h und beachten die Relation $LM \sin \alpha = h$, so ergibt sich aus (2) und (3) durch Elimination von t

$$v = \sqrt{2hg} \text{ d. h.}$$

in Rücksicht auf § 120 (3): der Punkt erlangt in M dieselbe Geschwindigkeit als in N im freien Falle von der Höhe der Ebene.

Wird umgekehrt der Punkt mit dieser Geschwindigkeit längs ML aufwärts geworfen, so erreicht er gerade den Punkt L und fällt von da wieder zurück nach M mit der nämlichen Geschwindigkeit.

§ 129. Zus. Hat der Punkt schon vorher, ehe er über die schiefe Ebene fällt, eine Geschwindigkeit $= v_1$ in der Richtung der Ebene, so ist die Endgeschwindigkeit in M die Summe oder Differenz aus dieser und der Fallgeschwindigkeit, wie in § 127 bewiesen wurde; also

$$(1)\ v = v_1 \pm gt \sin \alpha;$$

hat der Punkt dagegen eine vorausgehende Bewegung in anderer Richtung als LM, so muß v_1 erst in zwei Seitengeschwindigkeiten, in eine Componente $\perp$ LM und $\parallel$ LM, zerlegt werden. Macht die Richtung von v_1 mit dem Horizont einen Winkel $= \beta$, so sind die beiden Componenten $v_1 \cos(\beta - \alpha)$ und $v_1 \sin(\beta - \alpha)$, von

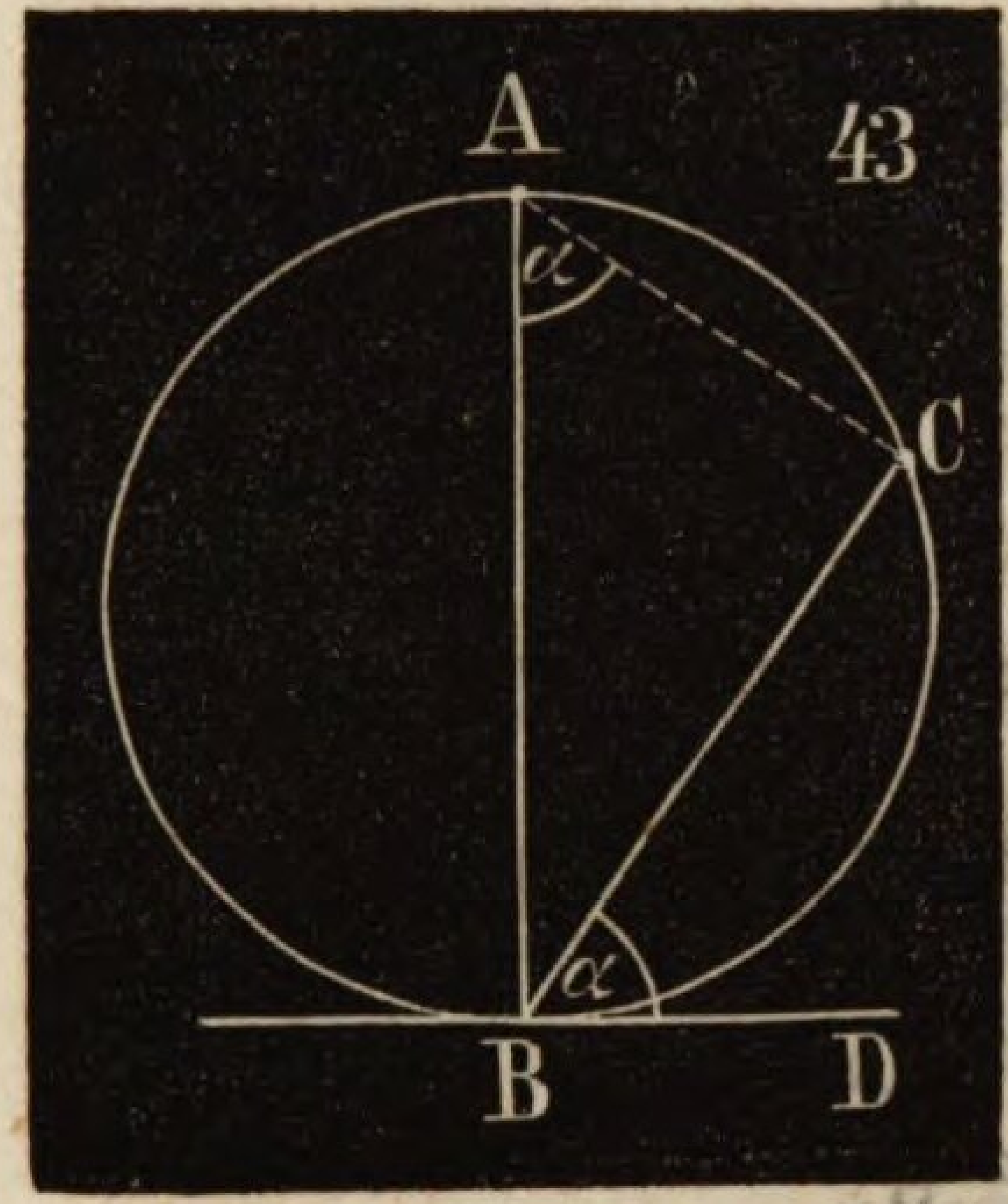
denen der letztere durch den Widerstand der Ebene LM verloren geht. Wir haben in diesem Falle

(2) $v = v_1 \cos(\beta - \alpha) \pm gt \sin \alpha$.

Zwischen der Länge s und der Bewegungsdauer t über LM besteht im ersten Falle die Gleichung

(3) $s = v_1 t \pm \frac{1}{2} gt^2 \sin \alpha$; im zweiten

(4) $s = v_1 t \cos(\beta - \alpha) \pm \frac{1}{2} gt^2 \sin \alpha$.



§ 130. Zus. Zieht man in einem vertikalen Kreise nach dem tiefsten Punkte B (Fig. 43) eine Sehne CB, welche mit der Tangente BD einen Winkel $= \alpha$ bildet, so kann man CB als schiefe Ebene und α als ihre Neigung betrachten. Ziehen wir noch den Durchmesser AB und die Sehne AC, so ist

$\angle BAC = \angle CBD = \alpha$, und

$BC = AB \sin \alpha = 2r \sin \alpha = s$.

Wir haben daher nach (3) in § 128

$2r \sin \alpha = \frac{1}{2} gt^2 \sin \alpha$, oder

(1) $t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$; d. h.

der Punkt braucht zum Fallen über jede Sehne die nämliche Zeit. Setzen wir diesen Werth für t in die Gl. (2), so erhalten wir

(2) $v = 2\sqrt{rg} . \sin \alpha$; d. h.

die Endgeschwindigkeit nimmt mit dem Neigungswinkel α ab und zu und hat ihren größten Werth $v = 2\sqrt{rg}$, wenn $\alpha = 90^0$, oder wenn der Punkt im Durchmesser AB herabfällt.

§ 131. Wurfbewegung *). a) vertikaler Wurf.

Wird ein schwerer Punkt oder Körper mit einer Geschwindigkeit v vertikal aufwärts oder abwärts geworfen, so steht er

---

*) Die Lehre von der Bewegung geworfener Körper, insbesondere der Geschützkugeln heißt Ballistik.

unter dem Einflusse der Wurf- und Schwerkraft zugleich, welche in derselben Vertikalen wirken. Der geworfene Punkt bleibt stets in derselben Vertikalen und hat eine Bewegung, welche nach den Erörterungen des § 127 bestimmt ist. Nach diesem § haben wir als Ausdruck der Geschwindigkeit V zur Zeit t entweder

$$(1)\ V = v - gt, \text{ oder } V = v + gt;$$

und als Ausdruck des zurückgelegten Weges entweder

$$(2)\ s = vt - \tfrac{1}{2}gt^2, \text{ oder } s = vt + \tfrac{1}{2}gt^2$$

je nachdem der Wurf aufwärts oder abwärts ausgeführt wird. Die Geschwindigkeit V kann nur bei einem Wurfe nach aufwärts Null werden, und zwar wenn

$$(3)\ v = gt, \text{ oder } t = \frac{v}{g} \text{ ist;}$$

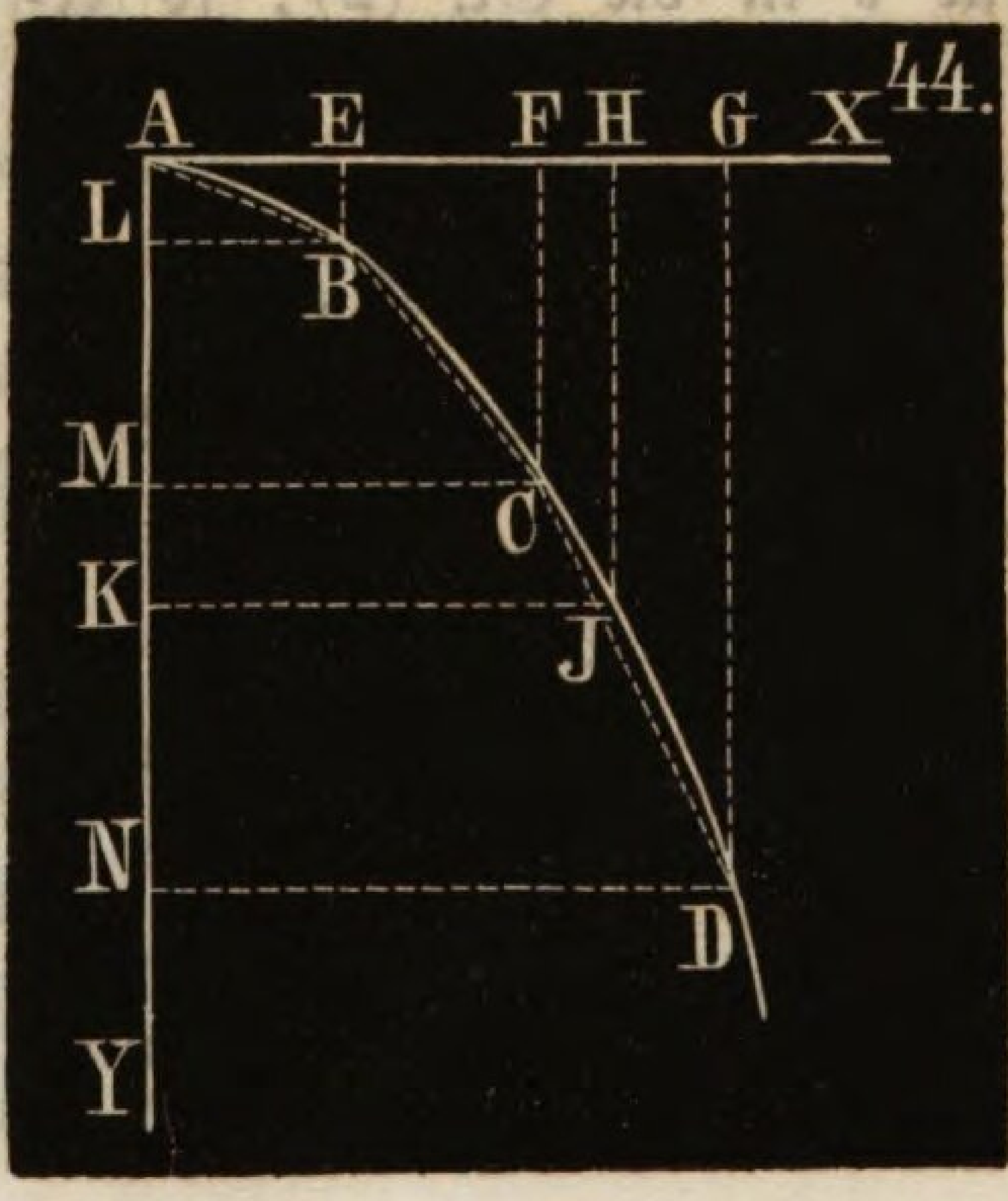
in diesem Falle hört der Punkt zu steigen auf, hat also seine größte Höhe erreicht, nämlich aus (2)

$$(4)\ s = \tfrac{1}{2}gt^2 = \frac{v^2}{2g}$$

und fängt zu fallen an. Die Zeit, welche er zum Fallen braucht, folgt unmittelbar aus (4)

$$(5)\ t = \frac{v}{g}, \text{ d. h. mit Rücksicht auf (3)}$$

der Punkt braucht ebenso lang zum Herabfallen, als zum Aufsteigen.



§ 132. b) horizontaler Wurf. Wird ein schwerer Punkt mit der Geschwindigkeit v horizontal geworfen, so ist er denselben Kräften wie vorhin unterworfen, beschreibt aber eine krummlinige Bahn, welche Parabel heißt. Denn ist (Fig. 44) AX die Richtung des Wurfes, AY die der Schwerkraft, so erfolgt die Bewegung längs AX gleichförmig,

längs AY beschleunigt. Ist nun AE = EF = FG = ... = v und AL = $\frac{1}{2}$g, AM = $\frac{4}{2}$g, AN = $\frac{9}{2}$g u. s. w., so beschreibt der Punkt vermöge der Betrachtungen in § 105 die gebrochene Bahn ABCD.... welche in Wirklichkeit krummlinig ist. Um nun die beliebige Stelle J aufzufinden, welche der Punkt zur Zeit t inne hat, genügt es JH und JK die Entfernungen des Punktes von AX und AY zu kennen. Nun ist aber JH = AK d. h. gleich dem Fallraume, welcher der Zeit t entspricht, und JK = AH d. h. gleich dem Wege, welchen der Punkt in der Zeit t mit der constanten Geschwindigkeit v längs AX zurücklegt. Setzen wir AH = x und AK = y, so ist

$$(1)\ x = vt \text{ und } y = \tfrac{1}{2} gt^2.$$

Mit Hülfe dieser zwei Gleichungen, welche für jedes t giltig sind, läßt sich mit aller Sicherheit die Stelle angeben, an der sich der Punkt zu einer beliebigen Zeit befindet. Durch Elimination von t erhalten wir noch

$$(2)\ y = \frac{g}{2v^2} x^2$$

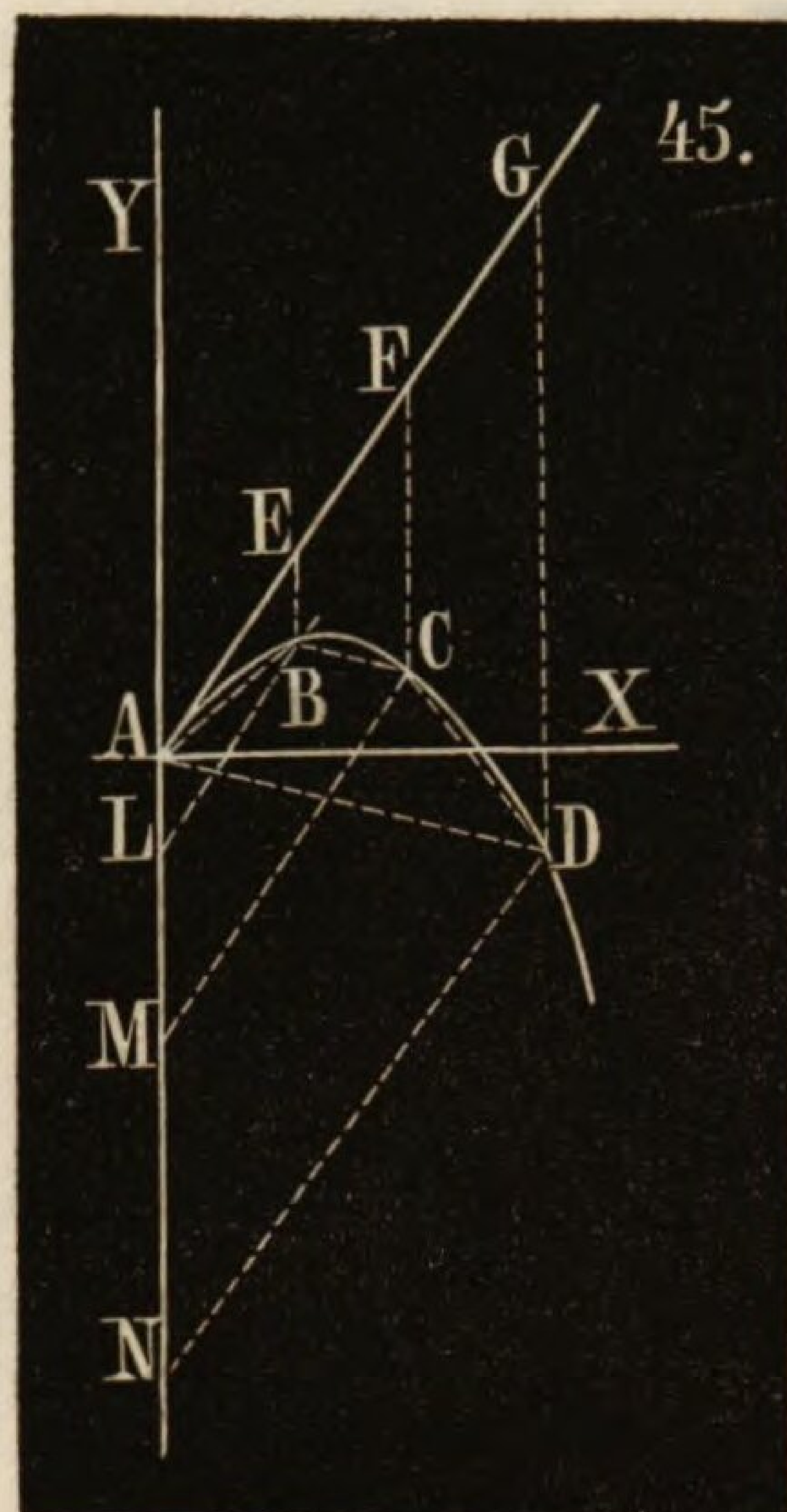
welche Gleichung die Gestalt der Bahn unabhängig von der Zeit darstellt. Die Geschwindigkeit V des Punktes in seiner Bahn ist die Resultante aus den rechtwinkeligen Componenten v längs AX und gt längs AY; also

$$(3)\ V = \sqrt{v^2 + g^2t^2}.$$

Vermöge dieser Gleichung können wir die Geschwindigkeit aus der Zeit und auch umgekehrt die Zeit aus der Bahngeschwindigkeit bestimmen. Zugleich sehen wir daraus, daß die Zunahme an Geschwindigkeit nicht constant, also die Bewegung keine gleichförmig beschleunigte ist. Aus diesem Grunde können wir auch nicht mehr mit unsern Hülfsmitteln den Weg s aus der Geschwindigkeit V oder der Zeit t ableiten.

§ 133. c) Wurf in beliebiger Richtung.

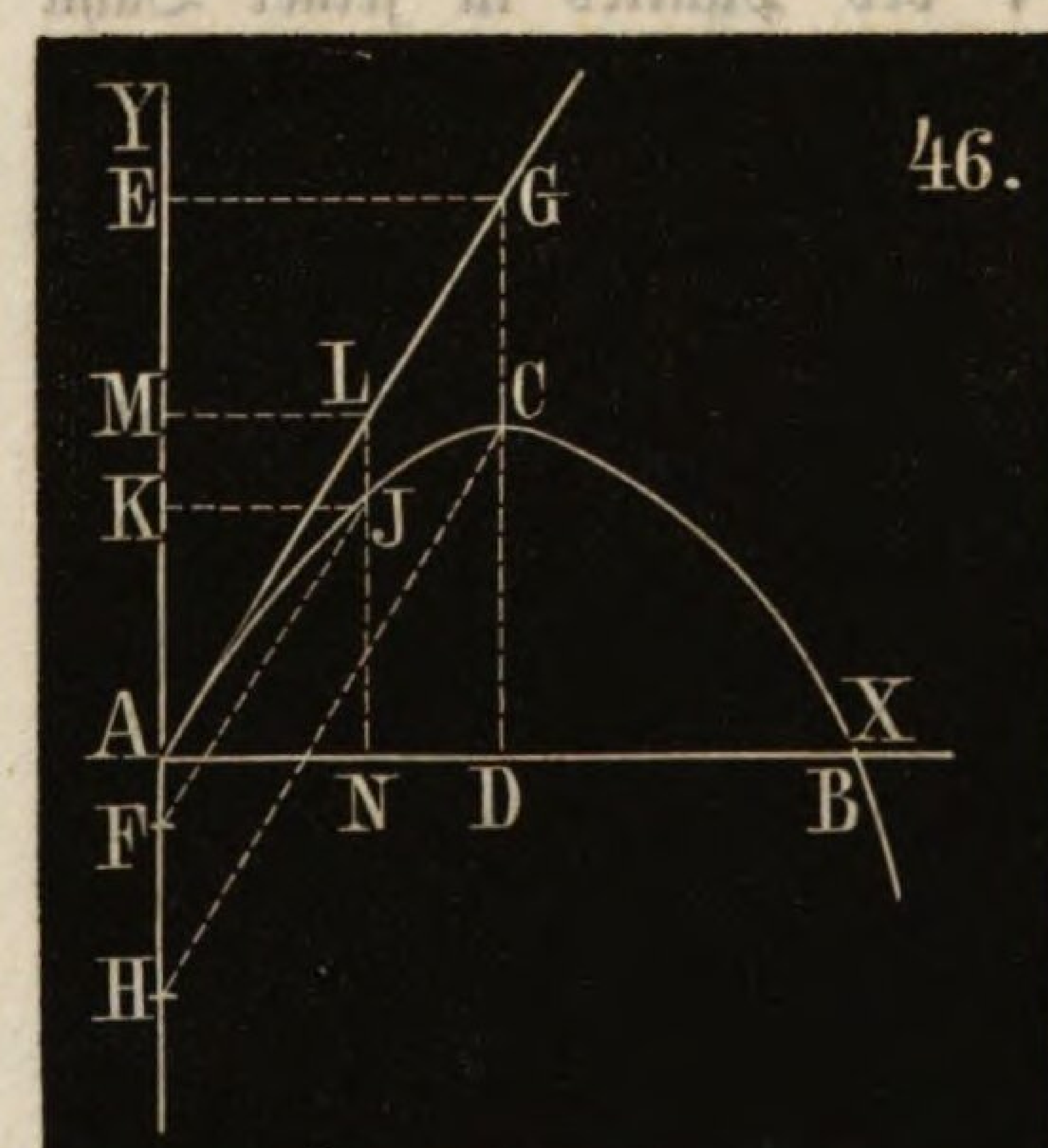
Wird ein schwerer Punkt in der Richtung AG (Fig. 45) mit der Geschwindigkeit v geworfen, so beschreibt er unter dem Einflusse der nämlichen zwei Kräfte wiederum eine Parabel. Ist



wie vorhin $AE = EF = FG = \ldots$ $= v$ und $AL = \frac{1}{2}g$, $AM = \frac{4}{2}g$, $AN = \frac{9}{2}g$ u. s. w. und ziehen wir $LB \# MC \# ND \# AG$, sowie $EB \# FC \# GD \# AY$, so sind A, B, C, D.... die aufeinander folgenden Stellen der Bahn, welche der Punkt von Sekunde zu Sekunde einnimmt. Ist nun (Fig. 46) $AY \perp AX$ und befindet sich der Punkt zur Zeit t in J, so ist die Lage dieses Punktes durch die zwei Lothe JN und JK bestimmt, welche wir auf AX und AY ziehen. Construiren wir noch das Parallelogramm ALJF und setzen $\angle GAX = \alpha$, so ist

$$JK = AN = AL \cos \alpha$$

$$JN = LN - JL = AL \sin \alpha - AF.$$



Nun ist aber der Voraussetzung zufolge $AL = vt$ und $AF = \frac{1}{2}gt^2$.

Setzen wir wie vorhin in § 132 $JN = AK = y$ und $AN = x$, so folgt durch Substitution vorstehender Werthe

(1) $x = vt \cos \alpha$

(2) $y = vt \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2$.

Durch diese zwei Gleichungen ist die Stelle J, sowie jede andere, welche einer gegebenen Zeit t entspricht, vollkommen bestimmt. Durch Elimination von t erhalten wir als Gleichung der Kurve

$$(3)\quad y = x \tan\alpha - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2.$$

Ziehen wir vom höchsten Punkt der Kurve CD ⊥ AX, so ist CD die größte Höhe, sowie AB die Weite des Wurfes.

Die Bahngeschwindigkeit V läßt sich in jedem Punkte in zwei rechtwinkelige Componenten ∥ AY und AX nämlich in

$$(4)\quad v\sin\alpha - gt, \text{ und } v\cos\alpha$$

zerlegen und umgekehrt als Resultante derselben betrachten. Wir erhalten demnach

$$(5)\quad V = \sqrt{v^2 + g^2t^2 - 2vgt\sin\alpha}$$

Auch hier können wir zwischen s und t eine Gleichung nicht aufstellen.

Der Punkt wird zu steigen aufhören, wenn die Geschwindigkeit längs AY gleich Null ist; also wenn aus (4)

$$v\sin\alpha - gt = o, \text{ oder wenn } t = \frac{v\sin\alpha}{g} \text{ ist.}$$

In diesem Falle erhalten wir aus (2) als Wurfhöhe

$$(6)\quad CD = \tfrac{1}{2}\,\frac{v^2\sin^2\alpha}{g} = \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Ist der Punkt in B d. h. im Horizont AX angelangt, so ist $y = o$; mithin aus (3) die Wurfweite

$$(7)\quad AB = \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha = 2gt^2\operatorname{cotg}\alpha.$$

Aus (6) und (7) erhalten wir noch die sehr einfache Beziehung zwischen Höhe und Weite des Wurfes

$$(8)\quad 4CD = AB\tan\alpha.$$

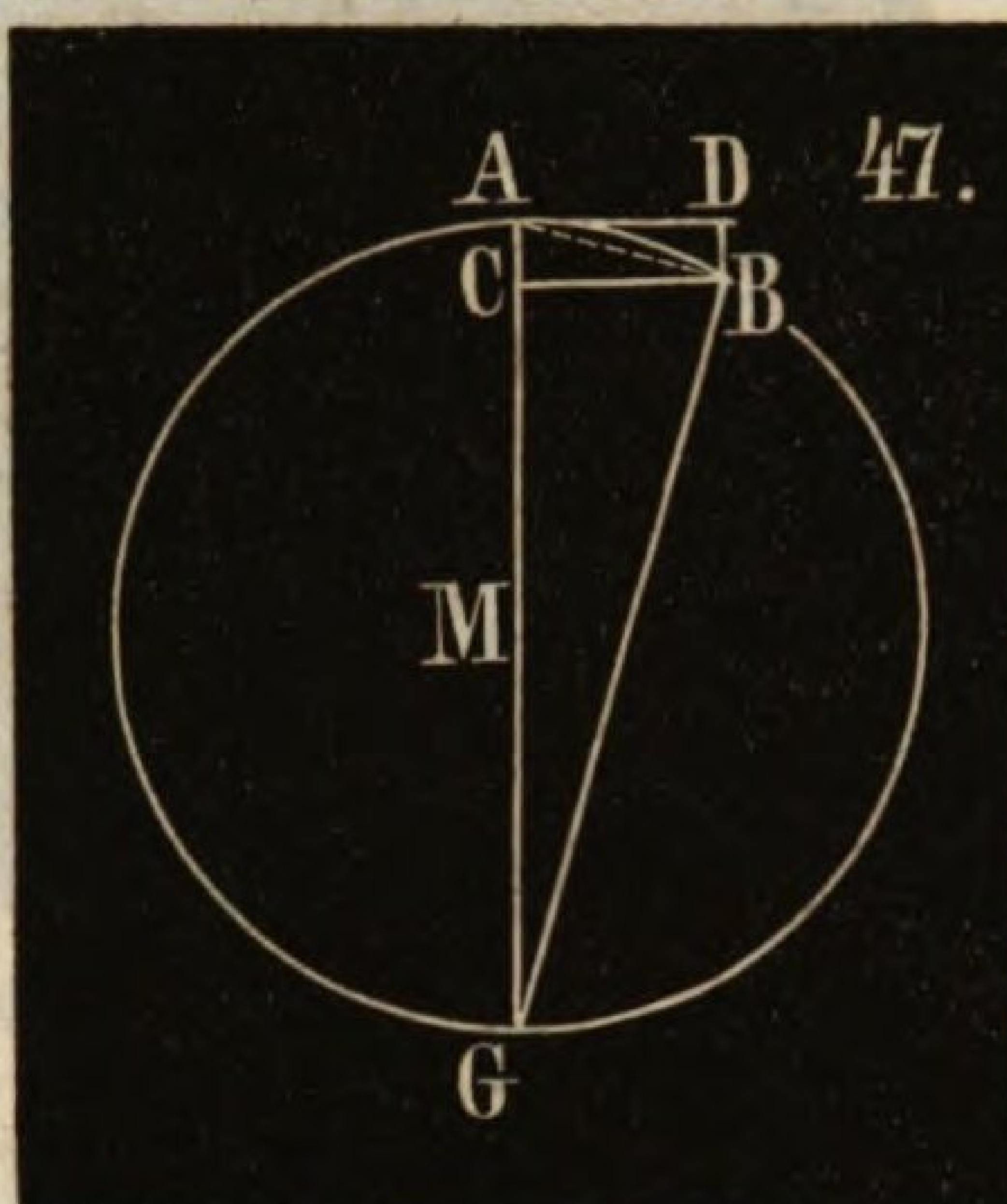
Außerdem läßt sich auch hier wie beim vertikalen Wurfe nachweisen, daß der Punkt sowohl zum Steigen als zum Fallen dieselbe Zeit nämlich

$$t = \frac{v\sin\alpha}{g}$$

braucht; endlich erreicht der Punkt die größt mögliche Weite

$$AB = \frac{v^2}{g}$$

wenn $\sin 2\alpha = 1$, oder $\alpha = 45^0$ ist. Schließlich ist noch zu erwähnen, daß die Wurfrichtung AG auch unter dem Horizont gewählt werden kann. In diesem Falle wirken Wurf- und Schwerkraft längs AY in gleichem Sinne und wir haben in den aufgestellten Gleichungen überall ein + statt — zu setzen. Diesem entsprechend heißt der Richtungswinkel α Elevations- oder Depressionswinkel, je nachdem AG oberhalb oder unterhalb AX genommen wird.



47.

§ 134. Kreisbewegung. Bewegt sich ein Punkt in der Peripherie eines Kreises vom Radius r während der Zeiteinheit von A nach B (Fig. 47), so können wir AB in die rechtwinkeligen Componenten AC und AD zerlegen, indem wir den Durchmesser AG und die Tangente AD ziehen und die Diagonale AB näherungsweise als Bogen gelten lassen. Demnach wird der Punkt von zwei Kräften in der Richtung AC und AD in Bewegung gesetzt. Die erstere heißt Centripetalkraft, deren Sitz wir im Mittelpunkt M annehmen, die letztere Tangentialkraft. Würde die Centralkraft in M zu wirken aufhören, oder durch eine ihr gleiche Gegenkraft aufgehoben, so müßte sich der Punkt in der Tangente fortbewegen. Solange daher dieß nicht geschieht, muß auch die Centralkraft während der ganzen Bewegung fortdauernd sein; mithin ist die Bewegung längs AC als eine beschleunigte zu betrachten, während wir die Bewegung von A bis B vorläufig als gleichförmig annehmen. Ziehen wir nun die Sehne BG, so ist $\triangle ABC \backsim \triangle ABG$, woraus folgt

$$AC : AB = AB : AG.$$

Bezeichnen wir die Bahngeschwindigkeit *) mit v und die

*) Anstatt durch den Bogen kann die Geschwindigkeit auch durch den Centriwinkel des Bogens ausgedrückt werden. Diese heißt Winkelgeschwindigkeit, jene lineare Geschwindigkeit.

centripetale Beschleunigung mit a, so ist AC $= \frac{1}{2}$a und AB $=$ v zu setzen; mithin

$$\tfrac{1}{2}a : v = v : 2r, \text{ oder}$$

$$(1)\quad a = \frac{v^2}{r}$$

So lange aber die Kraft in M sich nicht ändert, bleibt nothwendig auch a ungeändert. Dann folgt aus (1) daß v in allen Punkten der Bahn constant und die Kreisbewegung so lange gleichförmig ist, als die Centralkraft dieselbe bleibt. Jede Aenderung der Centralkraft zieht eine Aenderung der Geschwindigkeit v nach sich; wäre diese angenommene Aenderung stetig, so wäre auch die Kreisbewegung eine ungleichförmig beschleunigte; aber gleichwohl bliebe die Gleichung in (1) noch giltig.

Ist die bewegte Masse $=$ m, so haben wir als Ausdruck der Centralkraft

$$(2)\quad P = ma = \frac{mv^2}{r}$$

Von dieser Kraft wird die Masse m beständig gegen den Mittelpunkt hin angezogen. Weil aber der bewegte Punkt gleichwohl die Peripherie nicht verläßt, so muß zugleich eine andere Kraft thätig sein, welche der Centripetalkraft P an Größe gleich, der Richtung nach entgegengesetzt ist. Diese Kraft heißt Centrifugal- oder Schwungkraft, welche wir mit F bezeichnen wollen.

Für die tangentiale Geschwindigkeit haben wir

$$(3)\quad AD = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{v^2 - a^2} = \frac{v}{r}\sqrt{r^2 - v^2}.$$

Vollendet der Punkt während der Zeit t einen vollen Umlauf, so ist

$$(4)\quad v = \frac{2r\pi}{t}, \text{ und } a = \frac{4r\pi^2}{t^2}.$$

Im Falle die centripetale Beschleunigung a $=$ g wird, ist v $= \sqrt{rg}$ und die Umlaufszeit

$$(5)\quad t = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

§ 135. Elliptische Bewegung. Beschreibt ein Punkt von der Masse m eine Ellipse, so läßt sich der in der Zeiteinheit beschriebene Bogen näherungsweise als Kreisbogen betrachten. Hat der Punkt an einer bestimmten Stelle die Geschwindigkeit v und vom Sitze der anziehenden Kraft im Innern der Kurve eine Entfernung = r, so ist die centrale Beschleunigung und deren Kraft wie bei der Kreisbewegung

$$(1)\ a = \frac{v^2}{r},\ \text{und}\ (2)\ P = \frac{mv^2}{r}.$$

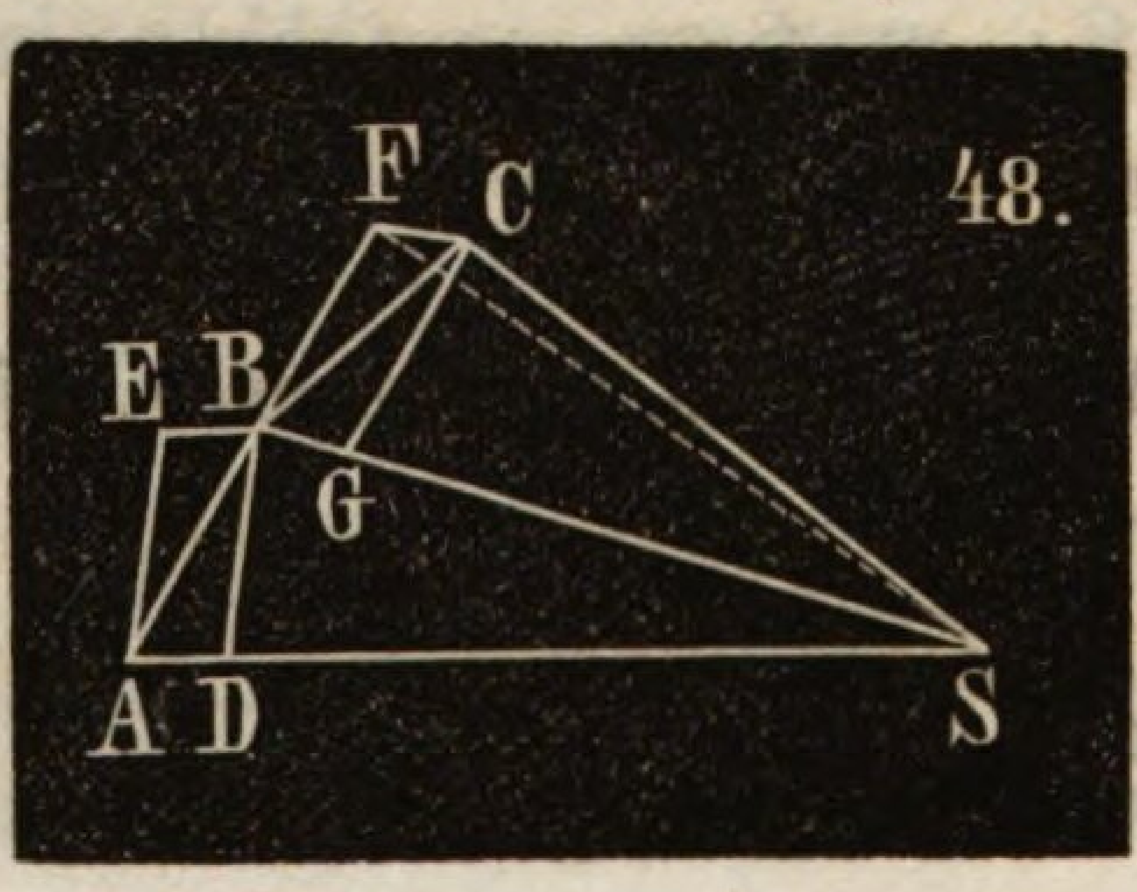
Da die Entfernung r veränderlich ist, so ist es nothwendig, auch die Beschleunigung a und die Geschwindigkeit v, während P selbst constant bleibt. Diese Aenderungen sind jedoch bei den Planetenbahnen so gering, daß wir sie bei vielen Fragen als Kreise betrachten dürfen. Auf eine eingehende Behandlung dieser Bewegungen müssen wir verzichten.

§ 136. Die Kepler'schen Gesetze.

Die von Kepler aufgestellten und nach ihm benannten drei Gesetze der Planetenbewegung lauten:

1) Alle Planeten bewegen sich in Ebenen um die Sonne; ihre Bahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne sich befindet;
2) Die vom Planeten nach der Sonne gezogene Gerade (radius vector) beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume (Sektoren);
3) Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Würfel (Kubus) der Entfernungen von der Sonne.

Von diesen drei Gesetzen können wir mit unsern Hülfsmitteln nur die letzten zwei beweisen.



Beweis zu 2. Bewegt sich der Planet, als Punkt betrachtet, während der Zeit t von A nach B (Fig. 48) mit der Geschwindigkeit v, so können wir AB dadurch in die Componenten AD und AE zerlegen, daß wir in A

die Tangente AE und eine Gerade AS nach dem Brennpunkte S ziehen und den Bogen AB als Diagonale des Parallelogramms AEBD betrachten unter Beachtung, daß

$$AD = \tfrac{1}{2} at^2 = \tfrac{1}{2} \frac{v^2}{r} t^2$$

sein muß. Dabei dürfen wir ohne Fehler annehmen, die Geschwindigkeit v habe sich von A bis B so wenig geändert, daß der Punkt dieselbe Geschwindigkeit auch in B noch hat. In B müßte sich ohne Einwirkung der Centralkraft der Planet mit unveränderter Geschwindigkeit in der Tangente BF fortbewegen und in derselben Zeit t einen Weg BF = AB beschreiben. Bewirkt nun die Centralkraft in S eine Ablenkung = BG, so wird die thatsächliche Bewegung von B nach C in der Diagonale des Parallelogramms BFCG erfolgen. Ziehen wir nun FS und CS, so haben wir

$\triangle ABS = \triangle BFS$ (gleiche Höhe und Grundlinie)
$\triangle BCS = \triangle BFS$ „ „ „ „

mithin $\triangle ABS = \triangle BFS$,
was zu beweisen war.

Beweis zu 3. Nehmen wir die Masse der Sonne zur Einheit und setzen die des Planeten = m und bezeichnen die Anziehungskraft der Sonne mit P, so haben wir einerseits als Centralkraft § 134 (2)

$$(1)\ P = \frac{mv^2}{r}$$

und andrerseits dem allgemeinen Attraktionsgesetze § 125 zufolge

$$(2)\ P = q\frac{m}{r^2}; \text{ mithin}$$

$$\frac{mv^2}{r} = q\frac{m}{r^2}, \text{ oder}$$

$$(3)\ v^2 r = q.$$

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit eines zweiten Planeten mit v_1, seine Entfernung von der Sonne mit r_1, so haben wir nach derselben Ableitung

$$(4)\ v_1^2 r_1 = q;$$

mithin aus (3) und (4)

$$(5)\ v^2 r = v_1^2 r_1 \text{ oder } v^2 : v_1^2 = r_1 : r$$ d. h.

die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Entfernungen von der Sonne. Verstehen wir unter v und v_1 die mittleren Geschwindigkeiten und bezeichnen mit t und t_1 die Umlaufszeiten; so ist

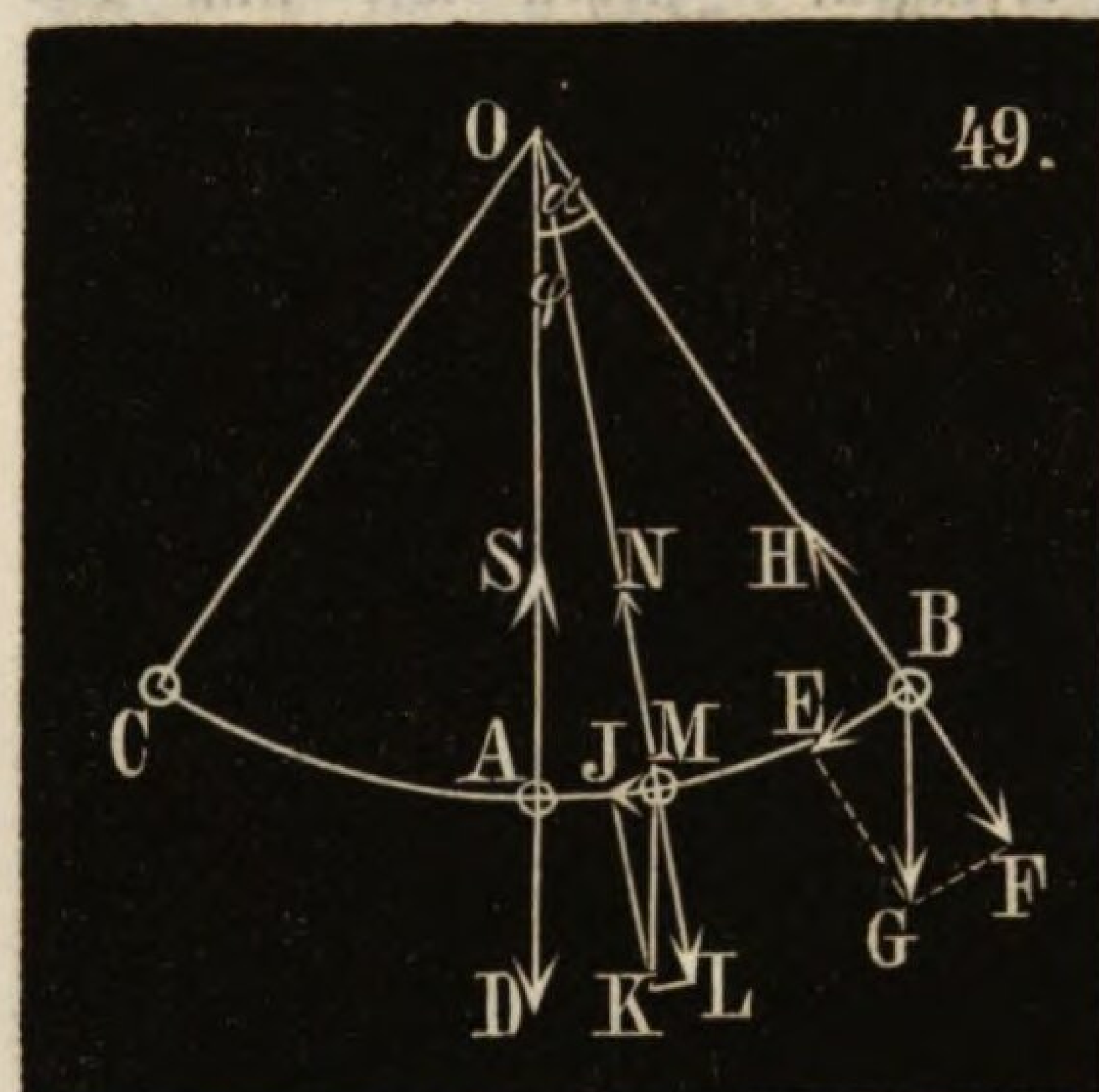
$$v = \frac{2r\pi}{t} \text{ und } v_1 = \frac{2r_1\pi}{t_1}.$$

Setzen wir diese Werthe in (5) ein, so ergibt sich

$$(6)\ t^2 : t_1^2 = r^3 : r_1^3$$

wie behauptet wurde.

§ 137. Pendelbewegung.



Ist (Fig. 49) ein schwerer Punkt A mittelst eines gewichtslosen undehnsamen Fadens OA in O frei aufgehängt, so wird der Punkt von der Schwere angezogen mit einer Intensität gleich seinem Gewichte und der Faden ist gezwungen die vertikale Richtung OA anzunehmen. In dieser Lage ist die beschleunigende Kraft die des freien Falles

$$k = a = g.$$

Denkt man sich den Punkt A unter steter Spannung des Fadens in die Lage B gebracht und sich selbst überlassen, so ist er auch hier der Schwerkraft unterworfen und wird, wie bei der schiefen Ebene, B verlassen, mit einer gewissen Geschwindigkeit v nach A kommen und die erlangte Kreisbewegung so lange fortsetzen, bis $v = o$ wird. Nach dem Fallgesetze muß dieß im Punkte C eintreten, sobald BA = AC ist. In C kann der Punkt ebensowenig verharren, als in B, er wird neuerdings

anfangen, von C bis A zu fallen und von A bis B zu steigen, und in eine Bewegung hin und her gerathen, welche er ins Unendliche fortsetzen müßte, wenn nicht der Widerstand der Luft und die Reibung in O entgegenwirkte.

Eine solche Vorrichtung heißt Pendel, die Art der Bewegung schwingend (oscillirend), die Bewegung von B bis C, oder von C bis B heißt Schwingung, und die hiezu erforderliche Zeit Schwingungsdauer. Der Winkel AOB $= \alpha$ heißt Ausschlags- oder Elongationswinkel.

Bei dieser Bewegung kennen wir die Bahn und bewegende Kraft; unsre Aufgabe ist es nun, aus diesen zwei Elementen die Geschwindigkeit v und die Zeit t zu bestimmen, welche dem Wege s entspricht. Die Schwerkraft wirkt stets vertikal; ihr Antrieb zur Bewegung ist aber in unserm Falle um so geringer, je kleiner der Winkel α wird. Denn ist $AD = g$ und machen wir BG gleich und parallel AD, so können wir BG durch die tangentiale und normale Componente BE und BF ersetzen. BF wird durch den Widerstand des Fadens aufgehoben, so daß zum Antrieb der Bewegung BE allein übrig bleibt.

Nun ist $\angle EGB = \angle AOB = \alpha$; mithin

$$(1)\quad BE = BG \sin\alpha = g \sin\alpha.$$

Gelangt der Punkt in eine tiefere Lage nach M und bezeichnen wir den Winkel AOM mit φ, so ist die Tangentialkraft

$$MJ = g \sin\varphi$$

und daher $MJ < BE$, weil auch $\varphi < \alpha$ ist, und wird endlich in A zu Null. Da nun die Tangentialkraft während des Fallens beständig abnimmt, so ist die Bewegung ungleichförmig veränderlich, deren Behandlung die elementaren Hülfsmittel übersteigt. Um nun die Geschwindigkeit v für irgend eine Stelle der Bahn aufzufinden, so ist ersichtlich, daß in B $v = o$ und in A am größten ist. Sowohl hier, als an jeder andern Stelle ist die Centripetalkraft AS gleich der Centrifugalkraft AD. Nun ist aber $AD = g$, während AS aus zwei Kräften zusammengesetzt ist. Schon vor der Bewegung hat der Faden eine Span-

nung = BH = BF, welche in Folge der Bewegung einen stets größeren Zuwachs erhält, dessen Größe nach der Theorie der Kreisbewegung in jedem Punkte der Peripherie durch $\frac{v^2}{r}$ ausgedrückt ist. Demnach ist

$$AS = BH + \frac{v^2}{r} = g \cos \alpha + \frac{v^2}{r}.$$

Wir haben somit für die Geschwindigkeit in A wegen AD = g

$$\frac{v^2}{r} + g \cos \alpha = g, \text{ oder}$$

$$(2)\quad v = \sqrt{gr(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{2gr} \sin \tfrac{1}{2} \alpha$$

Nach derselben Betrachtung haben wir in dem beliebigen Punkte M

$$MN = ML, \text{ oder}$$

$$\frac{v^2}{r} + g \cos \alpha = g \cos \varphi; \text{ mithin}$$

$$(3)\, v = \sqrt{rg(\cos \varphi - \cos \alpha)} = \sqrt{2rg \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \varphi) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \varphi)}$$

Die Bestimmung der Schwingungsdauer t hat besondere Schwierigkeiten; näherungsweise läßt sich dieselbe dadurch ermitteln, daß wir den Bogen AB des Ausschlagswinkels in beliebig viele Theile zerlegen und annehmen, der schwere Punkt des Pendels gleite über die aufeinander folgenden Sehnen der Theilbögen, und die Zeit nach der Theorie der schiefen Ebene berechnen. Für einen Ausschlagswinkel, der 5° nicht übersteigt, gilt die Formel

$$(4)\quad t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

worin l = r die Länge des Pendels bedeutet.

§ 138. Zus. Das hier beschriebene Pendel heißt mathematisches Pendel zum Unterschied von dem physischen, welches aus einer schweren Pendelstange und einer Linse besteht und jedesmal erst auf ein mathematisches reduzirt werden muß. Vollendet das Pendel eine volle Schwingung in 1 Sekunde d. h. ist t = 1″, so heißt dasselbe Sekundenpendel.

§ 139. Zus. Macht ein Pendel n Schwingungen in der Zeit T, so haben wir als Zeit einer Schwingung

$$(1)\ t = \frac{T}{n} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Hat dasselbe Pendel an einem anderen Orte der Erdoberfläche in derselben Zeit T die Schwingungszahl n_1, so beweist dieß einerseits, daß sowohl die Beschleunigung der Schwere als auch die Entfernung vom Erdmittelpunkt eine andere ist; andrerseits haben wir für diesen zweiten Ort

$$(2)\ t_1 = \frac{T}{n_1} = \pi \sqrt{\frac{l}{g_1}}.$$

Aus (1) und (2) folgt nun unmittelbar

$$(3)\ n.t = n_1.t_1, \text{ oder } n : n_1 = t_1 : t$$

$$(4)\ n : n_1 = \sqrt{g} : \sqrt{g_1} = t_1 : t.$$

Bezeichnen wir die Entfernungen vom Mittelpunkt der Erde mit r und r_1, so haben wir nach § 66 wegen $m = 1$

$$g = \frac{M}{r^2} \text{ und } g_1 = \frac{M}{r_1^2}; \text{ mithin}$$

$$(5)\ \sqrt{g} : \sqrt{g_1} = r_1 : r = t_1 : t = n : n_1.$$

§ 140. Zus. Haben zwei verschiedene Pendel von der Länge l und l_1 an zwei verschiedenen Orten dieselbe Schwingungszahl n, so besteht die Bedingung

$$\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l_1}{g_1}} \text{ oder } l : l_1 = g : g_1$$

Demnach muß das Sekundenpendel in demselben Verhältnisse verlängert oder verkürzt werden, als die Beschleunigung der Schwere zu- oder abnimmt.

Viertes Capitel.

Hindernisse der Bewegung.

§ 141. Jeder Körper, der mit andern in Berührung kommt, erleidet einen gewissen Widerstand in seiner Bewegung. Einen solchen Widerstand leisten nicht bloß feste Körper, sondern

auch Luft und Wasser. Aus diesem Grunde sind alle bisher aufgestellten Bewegungsgesetze in Beziehung auf unsre Erde bloß ideale, welche der Wirklichkeit nur näherungsweise entsprechen. Von den vielen Hindernissen der Bewegung wollen wir zwei, die Reibung und den Stoß, in so weit besprechen, als es zu einer klaren Vorstellung genügt.

§ 142. **Reibung.** Befindet sich ein Körper vom Gewichte Q im Zustande der Ruhe oder Bewegung auf einer Ebene, so leistet dieselbe einen doppelten Widerstand. Erstlich hält sie den senkrechten (normalen) Druck D des Gewichtes durch einen gleichgroßen Gegendruck aus; zweitens setzt sie der Bewegung einen gewissen Widerstand R entgegen, welcher der Richtung der Ebene parallel (tangential) ist und Reibung heißt. Je nach der Bewegungsart des Körpers heißt die Reibung gleitend oder rollend. Die Größe der Reibung ist von verschiedenen Umständen abhängig, und wird stets durch Versuche (empirisch) bestimmt. Befindet sich Q auf einer horizontalen Ebene und wenden wir (Fig. 39, § 123) ein Gewicht P von solcher Größe an, daß Q in Ruhe bleibt; dann ist nothwendig $R > P$. Bringen wir nach und nach immer größere Gewichte in Anwendung, so werden wir auf ein Gewicht P kommen, welches gerade groß genug ist, Q zum Gleiten zu bringen. In diesem Falle ist dann $R = P$. Durch vielfältige Versuche hat sich herausgestellt, daß für ein und dieselbe Ebene die Reibung stets dem Drucke proportional, also $R : D = f$, oder $R = f.D$ ist. Die constante Verhältnißzahl f heißt Reibungscoeffizient. Für eine horizontale Ebene ist $D = Q$; folglich

$$R = f.Q.$$

Bringen wir Q auf eine schiefe Ebene von der Neigung α und bezeichnen, wie bisher, die bewegende Kraft mit P, so haben wir unter Bezugnahme auf § 128 und § 86

$$P = Q \sin\alpha;\ D = Q \cos\alpha;\ \text{folglich}\ R = f.Q \cos\alpha.$$

Ist nun α klein genug, so wird Q nicht gleiten und es ist offenbar

$$R > P;\ \text{oder}\ f.Q \cos\alpha > Q \sin\alpha.$$

Nehmen wir α allmälich größer, so ändert sich zugleich P, D und R, während f constant bleibt, und wir können es dahin bringen, daß Q zu gleiten anfange. Bezeichnen wir für diesen besonderen Fall den Werth von α mit φ, so haben wir im Augenblick des Gleitens

$$R = P \text{ oder } f.Q \cos\alpha = Q \sin\alpha; \text{ und hieraus } f = \operatorname{tang}\varphi.$$

Dadurch haben wir ein zweites Mittel, den Reibungscoeffizienten f zu bestimmen. Der Neigungswinkel φ heißt Reibungswinkel.

§ 143. Anwendung auf die Fallbewegung über eine schiefe Ebene. Nach dem Vorausgehenden ist R eine Kraft, welche der bewegenden Kraft P entgegenwirkt. Da nun ganz allgemein

$$R = f.Q \cos\alpha, \text{ und } P = Q \sin\alpha,$$

so haben wir bei einer gleitenden Fallbewegung in Rücksicht auf § 128 als Beschleunigung

$$(1)\quad a = g\frac{Q \sin\alpha}{Q} - g\frac{f.Q \cos\alpha}{Q} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha);$$

folglich für v und s, welche der Zeit t entsprechen

$$(2)\quad v = gt(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

$$(3)\quad s = \tfrac{1}{2}\, gt^2(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Es wird nicht schwer fallen, nach diesem Beispiele auch bei anderen Bewegungsarten die Reibung R in Rechnung zu bringen. Soll z. B. Q über die schiefe Ebene aufwärts gezogen werden, so ist $Q \sin\alpha$ und $f.Q \cos\alpha$ zugleich, also ihre Summe

$$Q(\sin\alpha + f\cos\alpha)$$

von der Kraft P zu überwinden.

§ 144. **Stoß.** Treffen zwei Körper in ihrer Bewegung aufeinander, so bringt jeder auf den andern einen Stoß hervor, in Folge dessen jeder genöthigt wird, seine Bewegnng abzuändern. Von den verschiedenen möglichen Fällen nehmen wir der Einfachheit wegen an, die zwei Körper bewegen sich in ein und derselben Geraden, welche ihre Schwerpunkte verbindet (centraler Stoß). Je nach ihrer Beschaffenheit werden die Körper nach dem Zusammenstoße vereinigt bleiben und mit gleicher Geschwindigkeit ihre Bewegung gemeinschaftlich fortsetzen, oder zurück-

prallen und getrennt jeder mit einer andern Geschwindigkeit sich bewegen. Körper der ersteren Art heißen unelastisch, die der letzteren elastisch. Im ersteren Fall, den wir allein betrachten wollen, muß offenbar der eine an Geschwindigkeit gewinnen, der andere verlieren. Ueberdies leuchtet ein, daß die Dauer des Zusammenstoßes für beide Körper dieselbe ist und wir eben deßwegen von der Gleichung $Pt = mv$ § 115 ausgehen müssen.

Sind nun m_1, m_2 die Massen, P_1, P_2 die ursprünglich bewegenden Kräfte, v_1, v_2 die in der Zeit t_1, t_2 erlangten Geschwindigkeiten der beiden Körper, so ist m_1v_1 und m_2v_2 die Größe derjenigen Kraft, mit welcher jeder Körper auf den andern stoßt. Denn um die Gleichung $Pt = mv$ richtig aufzufassen, können wir uns vorstellen, eine andere Kraft P' ertheile der Masse m in der Zeit $t = 1$ dieselbe Geschwindigkeit v; alsdann ist offenbar

$$P' = mv, \text{ oder } P' = Pt, \text{ d. h.}$$

im Augenblick des Zusammenstoßes ist nicht P, sondern das Produkt Pt, oder sein Werth mv als bewegende Kraft anzusehen. Da nun der Voraussetzung zufolge die Körper nicht elastisch sind, so vereinigen sich im Augenblicke des Zusammenstoßes die Massen zu ihrer Summe $m_1 + m_2$ und die Kräfte zu $m_1v_1 \pm m_2v_2$, je nachdem die Bewegung in gleichem oder entgegengesetztem Sinne erfolgt. Die durch den Zusammenstoß hervorgebrachte Geschwindigkeit v ist daher nach § 114 ausgedrückt durch

$$v = \frac{m_1v_1 \pm m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

Die plötzlich aufgetretene Kraft des Stoßes erlischt zugleich mit dem Stoße und die vereinigte Masse muß ihre Bewegung nach dem Gesetze der Trägheit mit der erlangten Geschwindigkeit v gleichförmig fortsetzen, welche nur durch das Fortwirken der primitiven oder durch das Auftreten neuer Kräfte abgeändert wird. Zur Beurtheilung der Aenderungen nach dem Stoße verweisen wir auf § 127.

§ 145. Zus. Ist die Bewegung beider Körper vor dem Stoße eine gleichförmige, so ist sie es auch nach dem Stoße und wir haben

$$s = \frac{m_1 v_1 \pm m_2 v_2}{m_1 + m_2} t$$

als einzige Gleichung der Bewegung.

§ 146. Zus. Ist einer der beiden Körper in Ruhe, so ist selbstverständlich die Geschwindigkeit desselben = o zu setzen.

§ 147. Zus. Stellen wir die Gleichung des § 144 in der Form dar

$$(m_1 + m_2) v = m_1 v_1 \pm m_2 v_2$$

so heißt dieß: Die Quantität der Bewegung nach dem Stoße ist gleich der vor dem Stoße. Daraus folgt, daß der eine Körper an Geschwindigkeit ebensoviel gewonnen, als der andere verloren hat.

§ 148. Zus. Während also an Quantität der Bewegung nichts verloren geht, wird gleichwohl eine gewisse Kraft zerstört, welche erforderlich ist, die Körper so zusammen zu drücken, als es durch den Stoß geschehen ist; oder mit andern Worten, es geht bei jedem Zusammenstoße eine gewisse mechanische Arbeit verloren. Nun ist die lebendige Potenz vor dem Stoße

$$= \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2; \text{ und nach dem Stoße}$$

$$= \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \tfrac{1}{2} \frac{(m_1 v_1 \pm m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2}.$$

Die Differenz aus beiden

$$= \tfrac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 \mp v_2)^2$$

gibt den Verlust an mechanischer Arbeit.

III. Theil.

A. Aufgaben über das Gleichgewicht.

I. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte an einem Punkte.

1. Zwei Kräfte von P und Q ℔, deren Richtungen einen Winkel $= \alpha$ bilden, greifen einen Punkt A an. Welches ist ihre Resultante der Größe und Richtung nach, wenn

1) $P = 40$; 2) $P = 126{,}4$; 3) $P = 233{,}8$; 4) $P = 97$
$Q = 30$ $Q = 209{,}5$ $Q = 159{,}3$ $Q = 74{,}9$
$\alpha = 40^0$ $\alpha = 102^0 32'$ $\alpha = 90^0$ $\alpha = 151^0 24'$

2. Die Seitenkraft P bildet mit der Resultante R einen Winkel $= \beta$. Wie groß ist die andere Seitenkraft Q, sowie ihr Winkel γ, den sie mit R bildet, wenn

1) $P = 25$*); 2) $P = 205{,}2$; 3) $P = 133$; 4) $P = 91{,}5$
$R = 75$ $R = 192{,}5$ $R = 218$ $R = 87{,}6$
$\beta = 47^0$ $\beta = 56^0 20'$ $\beta = 127^0$ $\beta = 12^0 38'$

3. Zwei Seitenkräfte P und Q bilden mit ihrer Resultante R die Winkel β und γ. Wie groß ist Q und R, wenn

1) $P = 87$; 2) $P = 19{,}4$; 3) $P = 227$; 4) $P = 356{,}8$
$\beta = 53^0$ $\beta = 3^0 6'$ $\beta = 15^0 23'$ $\beta = 81^0 20'$
$\gamma = 63^0$ $\gamma = 92^0$ $\gamma = 46^0 29'$ $\gamma = 24^0 33'$

4. Drei Kräfte in einer Ebene P, P_1, P_2, welche den Punkt A angreifen, bilden beziehungsweise (§ 21) die Winkel α, β, γ unter sich. Welches ist ihre Resultante der Größe und Richtung nach, wenn

1) $P = 6$; $P_1 = 12$; $P_2 = 7$; $\alpha = 21^0$; $\beta = 18^0$
2) $P = 33$; $P_1 = 19$; $P_2 = 8$; $\alpha = 40^0$; $\beta = 63^0$
3) $P = 15$; $P_1 = 25$; $P_2 = 14$; $\alpha = 18^0$; $\beta = 45^0$

5. Welches ist die Resultante der Größe und Richtung nach aus drei Kräften P, P_1, P_2, wenn jede derselben auf den beiden andern senkrecht ist, und

1) $P = 9$; 2) $P = 24$; 3) $P = 40$; 4) $P = 72$
$P_1 = 12$ $P_1 = 7$ $P_1 = 72$ $P_1 = 16$
$P_2 = 36$ $P_2 = 60$ $P_2 = 21$ $P_2 = 63$

6. Welches sind die drei senkrechten Componenten der vorigen Aufgabe, wenn sie mit ihrer Resultante R die Winkel α, β, γ machen, und

1) $R = 24$; $\alpha = 36^0 45'$; $\beta = 29^0 18'$; $\gamma = 41^0 23'$
2) $R = 36{,}5$; $\alpha = 15^0 40'$; $\beta = 31^0 27'$; $\gamma = 39^0 12'$
3) $R = 29{,}3$; $\alpha = 25^0 14'$; $\beta = 20^0 39'$; $\gamma = 28^0 40'$

---

*) Ueberall, wo das Gewicht nicht näher bezeichnet ist, steht die Wahl der Einheit frei.

7. Drei gleiche Kräfte im Raume von P ℔ bilden unter sich die Winkel α, β, γ. Welches ist ihre Resultante R, wenn

1) $P = 7$; $\alpha = 32^0 50'$; $\beta = 18^0 24'$; $\gamma = 60^0$
2) $P = 9$; $\alpha = 30^0$; $\beta = 60^0$; $\gamma = 90^0$
3) $P = 15$; $\alpha = 16^0 25'$; $\beta = 33^0 12'$; $\gamma = 45^0$

8. Drei Kräfte, welche (Fig. 9, § 24) in einer Ebene liegen und den Punkt A angreifen, bilden mit der Richtung AX beziehungsweise die Winkel α, β, γ. Welches ist ihre Resultante der Größe und Richtung nach, wenn

1) $P = 39$; $P_1 = 27$; $P_2 = 9$; $\alpha = 12^0$; $\beta = 40^0$; $\gamma = 109^0$
1) $P = 46$; $P_1 = 91$; $P_2 = 36$; $\alpha = 24^0$; $\beta = 97^0$; $\gamma = 204^0$
3) $P = 76$; $P_1 = 87$; $P_2 = 47$; $\alpha = 49^0$; $\beta = 120^0$; $\gamma = 215^0$
4) $P = 56$; $P_1 = 35$; $P_2 = 64$; $\alpha = 70^0$; $\beta = 104^0$; $\gamma = 140^0$

9. Von zwei aufeinander senkrechten Kräften P und Q macht P mit der Richtung AX (Fig. 9, § 24) einen Winkel $= \alpha$. Welchen Winkel macht die Resultante R mit AX, wenn

1) $P = 72$;	2) $P = 37$;	3) $P = 49$;	4) $P = 124$
$Q = 49$	$Q = 95$	$Q = 23$	$Q = 87$
$\alpha = 75^0$	$\alpha = 93^0$	$\alpha = 172^0$	$\alpha = 79^0$

10. Die Kraft R = 105 ℔ soll in zwei rechtwinkelige Componenten P und Q zerlegt werden, so daß sie sich verhalten, wie 3 : 4.

II. Gleichgewicht an einem Punkte.

11. Drei Kräfte P, Q, R in einer Ebene halten sich am Punkte A Gleichgewicht. Welches sind die Winkel α, β, γ, die sie unter sich bilden, wenn

1) $P = 5$;	2) $P = 9$;	3) $P = 21$;	4) $P = 7$
$Q = 7$	$Q = 12$	$Q = 28$	$Q = 24$
$R = 9$	$R = 15$	$R = 35$	$R = 25$

12. Welche Winkel macht in der vorausgehenden Aufgabe R mit P und Q, wenn P und Q den Winkel α einschließen, und

1) $P = 37{,}5$;	2) $P = 83{,}6$;	3) $P = 67$;	4) $P = 28$
$Q = 48{,}9$	$Q = 49{,}5$	$Q = 92$	$Q = 43$
$\alpha = 60^0$	$\alpha = 93''$	$\alpha = 124^0$	$\alpha = 165^0$

13. Die Kräfte P, Q, R in einer Ebene halten sich am Punkte A Gleichgewicht. Welche Winkel machen P und Q mit der horizontalen Richtung AX, wenn R einen Winkel $= \gamma$ mit AX macht, und

1) $P = 96,8$; $Q = 73$; $R = 136,3$; $\gamma = 45^0$
2) $P = 125,7$ $Q = 81,4$ $R = 91,2$ $\gamma = 34^0$
3) $P = 76,5$ $Q = 124$ $R = 85,6$ $\gamma = 75^0$

14. An den Endpunkten eines Seiles, welches über zwei vertikale Rollen in A und B geführt wird, wirken zwei Gewichte P und Q. Wie groß muß ein drittes Gewicht R in C (zwischen A und B) angebracht werden, damit Gleichgewicht stattfinde und Winkel ACB ein rechter sei, wenn

1)	2)	3)	4)
$P = 12$;	$P = 252$;	$P = 77$;	$P = 24$
$Q = 35$	$Q = 39$	$Q = 36$	$Q = 7$

15. Wie groß ist in der vorigen Aufgabe der Winkel α, welchen AC mit dem Horizont macht?

16. Von vier Kräften P, P_1, P_2, P_3 in einer Ebene, welche sich an einem Punkte A Gleichgewicht halten, macht P mit P_1, desgleichen P_2 mit P_3 einen Winkel $= 90^0$. Wie groß ist P_3 und welchen Winkel machen die zunächst liegenden Kräfte P_1 und P_2 miteinander, wenn

1)	2)	3)	4)
$P = 14$;	$P = 154$;	$P = 126$;	$P = 21$
$P_1 = 48$	$P_1 = 72$	$P_1 = 19,5$	$P_1 = 72$
$P_2 = 39$	$P_2 = 40$	$P_2 = 41$	$P_2 = 81$

17. Wie groß sind in der vorigen Aufgabe P_2 und P_3, wenn die Kraft P mit P_1 einen Winkel $= \beta$ macht und

1)	2)	3)	4)
$P = 21$;	$P = 6$;	$P = 28$;	$P = 15$
$P_1 = 28$	$P_1 = 17,5$	$P_1 = 96$	$P_1 = 8$
$\beta = 60^0$	$\beta = 15^0$	$\beta = 53^0$	$\beta = 35^0$

18. Von vier Kräften P, P_1, P_2, R im Raume, welche an einem Punkte A sich Gleichgewicht halten, sind die ersten drei aufeinander senkrecht. Welche Winkel macht R mit den drei senkrechten Kräften, wenn

1) $P = 3$;	2) $P = 8$;	3) $P = 12$;	4) $P = 6$
$P_1 = 4$	$P_1 = 15$	$P_1 = 7$	$P_1 = 8$
$P_2 = 12$	$P_2 = 7$	$P_2 = 13$	$P_2 = 24$

III. Gleichgewicht und Resultante paralleler Kräfte.

19. Zwei parallele Kräfte P und P_1 greifen in den Punkten A und B einer Geraden an und haben von einem dritten Punkte O derselben Geraden eine Entfernung $OA = a$ *), $OB = a_1$. Welches ist ihre Resultante R und welches ihre Entfernung vom Punte O, wenn (vergl. § 36 und 40)

1) $P = 13$; $a = 3,4$; $P_1 = 7$; $a_1 = 5,2$
2) $P = 37$; $a = 2,4$; $P_1 = -17$; $a_1 = 0,8$
3) $P = 42$; $a = 5,3$; $P_1 = 32$; $a_1 = 1,5$
4) $P = 24$; $a = -5$; $P_1 = -24$; $a_1 = 0,5$

20. Drei parallele Kräfte P, P_1, P_2 an einer Geraden greifen in A, B, C an und haben von dem Punkte O derselben Geraden eine Entfernung $OA = a$, $OB = a_1$, $OC = a_2$. Welches ist ihre Resultante, sowie ihre Entfernung vom Punkte O, wenn

1) $P = 12$; $a = 3$; $P_1 = -9$; $a_1 = 4$; $P_2 = 7$; $a_2 = 0,6$
1) $P = 25$; $a = -2$; $P_1 = 13$; $a_1 = 3$; $P_2 = -8$; $a_2 = -0,4$
3) $P = -33$; $a = -4$; $P_1 = 48$; $a_1 = 5$; $P_2 = 6$; $a_2 = -17$

21. Drei parallele Kräfte P, Q, R an einer Geraden, deren Entfernungen vom Punkte O dieser Geraden analog der vorigen Aufgabe mit a, a_1, a_2 bezeichnet sind, halten sich Gleichgewicht. Wie groß ist R, und an welchem Punkte greift sie an, wenn

1) $P = 34$; $a = 1,2$; $Q = 26$; $a_1 = 4,2$
2) $P = -22$; $a = -3,6$; $Q = 13$; $a_1 = 1,8$
3) $P = 18$; $a = -4$; $Q = -30$; $a_1 = 2,4$

---

*) Als Längeneinheit ist überall der bayerische Fuß, $1' = 0,291859^m$ (Meter) oder $1^m = 3,426309'$ gemeint; es kann aber auch jede andere Längeneinheit gewählt werden.

22. An den Endpunkten eines horizontalen Dreieckes ABC wirken drei gleiche Gewichte von der Größe $= P$ Ü. Bestimme die Resultante R und den Angriffspunkt O derselben durch die drei Seiten des Dreieckes a, b, c, wenn

1) $P = 7;\ a = 12;\ b = 9;\ c = 17$
2) $P = 35;\ a = 14;\ b = 23;\ c = 18$
3) $P = 28;\ a = 16;\ b = 30;\ c = 24$

23. In der Ebene der zwei Senkrechten OX und OY befindet sich ein Dreieck ABC, deren Endpunkte von beiden Geraden einen Abstand haben, welcher beziehungsweise durch a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 ausgedrückt ist. Bestimme (§ 46) die Resultante der drei parallelen Kräfte P, P_1, P_2, welche in A, B, C angreifen, sowie die Lage ihres Angriffspunktes, wenn

1) $\begin{cases} P = 46;\ a = 5{,}2;\ b = 3{,}5 \\ P_1 = -37;\ a_1 = 0;\ b_1 = 0 \\ P_2 = 16;\ a_2 = -4;\ b_2 = 1{,}2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} P = 29;\ a = 3{,}2;\ b = 4{,}3 \\ P_1 = 35;\ a_1 = -2;\ b_1 = 3{,}5 \\ P_2 = -14;\ a_2 = 0;\ b_2 = 0{,}8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} P = 27;\ a = 2{,}5;\ b = 1{,}4 \\ P_1 = -35;\ a_1 = -2{,}4;\ b_1 = 3 \\ P_2 = 13;\ a_2 = -3;\ b_2 = 2{,}6. \end{cases}$

24. An den Ecken eines rechtwinkeligen Dreieckes ABC wirken drei Kräfte senkrecht auf die Ebene desselben. Bestimme die Lage des Angriffspunktes der Resultante R aus den Katheten a und b, wenn

1) $P = 14;\ P_1 = -24;\ P_2 = 30;\ a = 3;\ b = 4$
2) $P = 17;\ P_1 = 10;\ P_2 = 23;\ a = 6;\ b = 8$
3) $P = 26;\ P_1 = 14;\ P_2 = -36;\ a = 9;\ b = 12$

25. An den Enden eines Rechteckes, dessen Seiten a und b sind, wirken vier Gewichte. Welches ist die Lage des Angriffspunktes der Resultante R, wenn

1) $P = 7;\ P_1 = 9;\ P_2 = 12;\ P_3 = 8;\ a = 12;\ b = 19$
2) $P = 10;\ P_1 = 5;\ P_2 = 12;\ P_3 = 9;\ a = 5;\ b = 6$
3) $P = 4;\ P_1 = 6;\ P_2 = 13;\ P_3 = 3;\ a = 9;\ b = 5$

26. Zwei Durchmesser eines Kreises, dessen Radius $r = 1$, tragen an ihren Endpunkten vier verschiedene Gewichte und schließen einen Winkel $= \varphi$ ein. Wo liegt der Angriffspunkt der Resultante, wenn

1) $P = 12;\ P_1 = 16;\ P_2 = 10;\ P_3 = 14;\ \varphi = 60^0$
2) $P = 8;\ P_1 = 20;\ P_2 = 22;\ P_3 = 18;\ \varphi = 45^0$
3) $P = 6;\ P_1 = 14;\ P_2 = 16;\ P_3 = 24;\ \varphi = 30^0$

IV. Gleichgewicht und Resultante beliebiger Kräfte in einer Ebene.

Vorerinnerung. Um die Richtung einer Kraft ohne Mißverständniß auszudrücken, bestimmen wir den Winkel, den die Kraft mit der positiven Richtunng einer festen z. B. mit einer horizontalen Geraden macht. Dieser Winkel hat einen Spielraum von 0 bis 360^0 und setzt voraus, daß jede Kraft nur der Größe nach, d. h. im absoluten Sinne genommen werde.

27. Welches ist der Angriffspunkt und die Größe der Resultante zweier ebenen Kräfte P und Q, welche in A und B angreifen und mit der Geraden $AB = a$ die Winkel α und β machen, wenn

1) $P = 5;\ \alpha = 180^0;\ Q = 12;\ \beta = 90^0;\ a = 6$
2) $P = 9;\ \alpha = 45^0;\ Q = 12;\ \beta = 120^0;\ a = 8$
3) $P = 6;\ \alpha = 60^0;\ Q = 8;\ \beta = 180^0;\ a = 9$
4) $P = 13;\ \alpha = 90^0;\ Q = 15;\ \beta = 270^0;\ a = 4$

28. Drei Kräfte $P, P_1\ P_2$ wirken in der Ebene des Dreieckes ABC an dessen Eckpunkten und bilden mit der Basis b beziehungsweise die Winkel α, β, γ, während die Basis b mit der Seite c den Winkel A einschließt. Bestimme Größe und Richtung der Resultante, sowie die Lage ihres Angriffspunktes, wenn

1) $b = 12;\quad c = 9;\quad A = 60^0$
$\alpha = 0^0 \quad \beta = 90^0 \quad \gamma = 180^0$
$P = 9 \quad P_1 = 8 \quad P_2 = 15;$

2) $b = 15$; $c = 8$; $A = 90^0$
$\alpha = 60^0$ $\beta = 270^0$ $\gamma = 240^0$
$P = 7$ $P_1 = 9$ $P_2 = 12$;

3) $b = 9$; $c = 6$; $A = 120^0$
$\alpha = 180^0$; $\beta = 90^0$ $\gamma = 45^0$
$P = 13$ $P_1 = 5$ $P_2 = 8$.

29. Drei Kräfte P, Q, R, welche in der Ebene des gleichseitigen Dreieckes ABC an dessen Eckpunkten sich Gleichgewicht halten, bilden mit der Basis b beziehungsweise die Winkel α, β, γ. Welche Werthe haben diese Winkel, wenn

1) $b = 6$; $P = 5$; $Q = 7$; $R = 9$
2) $b = 8$; $P = 3$; $Q = 9$; $R = 5$
3) $b = 10$; $P = 12$; $Q = 5$; $R = 7$

30. Drei Kräfte P, Q, R, welche in einer Ebene liegen, und an den Punkten A, B, C einer Geraden angreifen, sind im Gleichgewicht und bilden mit $AB = a$ beziehungsweise die Winkel α, β, γ. Bestimme R, ihren Richtungswinkel γ und die Lage von C, wenn

1) $a = 4$; $P = 8$; $\alpha = 60^0$; $Q = 12$; $\beta = 180^0$
2) $a = 5$; $P = 7$; $\alpha = 90^0$; $Q = 14$; $\beta = 0^0$
3) $a = 9$; $P = 12$; $\alpha = 120^0$; $Q = 9$; $\beta = 135^0$
4) $a = 9$; $P = 15$; $\alpha = 270^0$; $Q = 20$; $\beta = 120^0$

31. An den Eckpunkten der Diagonale AC eines Parallelogramms ABCD wirken P und P_2 längs AC in entgegengesetzter Richtung zu einander; desgleichen P_1 und P_3 in der Diagonale BD. Bestimme Größe und Richtung der Resultante, wenn die Diagonalen einen Winkel $= \varphi$ einschließen, und

1) $P = 18$; $P_2 = 35$; $P_1 = 21$; $P_3 = 33$; $\varphi = 48^0$
2) $P = 25$; $P_2 = 41$; $P_1 = 32$; $P_3 = 19$; $\varphi = 129^0$
3) $P = 14$; $P_2 = 19$; $P_1 = 26$; $P_3 = 28$; $\varphi = 75^0$.

32. In der Ebene eines gleichschenkeligen und rechtwinkeligen Dreieckes halten sich drei Kräfte P, Q, R an den Endpunkten Gleichgewicht. Welche Winkel bilden sie mit der Hypotenuse, wenn

1) $P = 3$; 2) $P = 5$; 3) $P = 9$; 4) $P = 12$
$Q = 5$ $Q = 10$ $Q = 7$ $Q = 9$
$R = 7$ $R = 8$ $R = 3$ $R = 6$

33. Drei gleiche Kräfte halten sich an den Ecken eines Dreieckes ABC Gleichgewicht. Welche Winkel bilden sie mit der Seite $BC = a$, oder mit $AC = b$, wenn

1) $a = 14$; 2) $a = 12$; 3) $a = 10$; 4) $a = 22$
$b = 20$ $b = 16$ $b = 20$ $b = 12$
$C = 60^0$ $C = 30^0$ $C = 135^0$ $C = 120^0$

V. Bestimmung des Schwerpunktes mit Anwendungen.

34. Welches ist die Entfernung des Schwerpunktes eines Dreieckes von jedem Ecke, wenn die Seiten desselben mit a, b, c bezeichnet sind und

1) $a = 35$; 2) $a = 24$; 3) $a = 16$; 4) $a = 12$
$b = 32$ $b = 36$ $b = 22$ $b = 30$
$c = 17$ $c = 28$ $c = 34$ $c = 28$

35. Welche Entfernung hat der Schwerpunkt eines Parallelogramms, dessen Seiten mit a und b bezeichnet sind, von jedem Ecke, wenn die Diagonalen einen Winkel $= \varphi$ einschließen, und

1) $a = 12$; 2) $a = 9$; 3) $a = 13$; 4) $a = 21$
$b = 15$ $b = 7$ $b = 20$ $b = 16$
$\varphi = 60^0$ $\varphi = 90^0$ $\varphi = 120^0$ $\varphi = 133^0$

36. Bestimme den Schwerpunkt eines Trapezes aus seinen parallelen Seiten a und b und deren senkrechten Abstand h, wenn

1) $a = 6$; 2) $a = 8$; 3) $a = 4$; 4) $a = 5$
$b = 9$ $b = 12$ $b = 10$ $b = 8$
$h = 5$ $h = 6$ $h = 7$ $h = 2{,}6$

37. Der Schwerpunkt eines Tetraeders, dessen Kante $= a$ ist, hat von jedem Ecke eine Entfernung

$$x = \frac{a}{4}\sqrt{6}.$$

38. Der Schwerpunkt der übrigen regulären Polyeder hat von jedem Ecke gleiche Entfernung und zwar

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{3} \text{ für das Hexaeder,}$$

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{2} \text{ für das Oktaeder,}$$

$$x = \frac{a}{4}\sqrt{18 + 6\sqrt{5}} \text{ für das Dodekaeder,}$$

$$x = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \text{ für das Ikosaeder,}$$

wenn a die Kante derselben bezeichnet.

39. Sind a, b, c die Seitenkanten, d, e, f die Grundkanten einer dreiseitigen Pyramide, so ist die Entfernung des Schwerpunktes von der Spitze ausgedrückt durch

$$x = \tfrac{1}{4}\sqrt{3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - d^2 - e^2 - f^2}.$$

40. Bestimme die Lage des Schwerpunktes einer abgekürzten Pyramide aus den parallelen Grundflächen G, g und ihrem Abstand h, wenn

1) $G = 18$;	2) $G = 16$;	3) $G = 12$;	4) $G = 50$
$g = 8$	$g = 9$	$g = 3$	$g = 18$
$h = 7{,}6$	$h = 7{,}4$	$h = 14$	$h = 19{,}6$

41. Bestimme die Lage des Schwerpunktes eines abgekürzten Kegels aus den Radien R, r der parallelen Grundflächen und ihrem Abstand h, wenn

1) $R = 5$;	2) $R = 9$;	3) $R = 10$;	4) $R = 12$
$r = 3$	$r = 5$	$r = 6$	$r = 6$
$h = 9{,}8$	$h = 6{,}04$	$h = 4{,}9$	$h = 6{,}3$

42. Zwei homogene gleich dichte Kugeln mit den Radien R und r sind in ihren Mittelpunkten A und B durch eine feste Gerade AB = a zu einem System verbunden. Wo liegt der gemeinsame Schwerpunkt, wenn

1) $R = 31$;	$R = 41$;	3) $R = 15$;	4) $R = 19$
$r = 3$	$r = 2{,}5$	$r = 4$	$r = 5$
$a = 125$	$a = 250$	$a = 204$	$a = 30.$

43. Eine Leiter von P ℔ Gewicht ruht mit ihrem oberen Ende auf einer schiefen Ebene von 60° Neigung, mit ihrem

unteren auf einer glatten horizontalen Ebene. Welche horizontale Kraft hindert die Leiter am Gleiten, wenn sie gegen den Horizont eine Neigung $= 30^0$ hat?

44. Eine Kugel von P ℔ Gewicht ruht auf zwei schiefen Ebenen von der Neignng α und β. Welchen Druck übt sie auf jede Ebene aus?

45. Ein P ℔ schwerer und homogener Stab ruht in seinen Endpunkten auf zwei glatten schiefen Ebenen von der Neigung α und β. Bestimme den Druck auf die Ebene und die Lage des Gleichgewichts.

46. Ein P ℔ schwerer und homogener Stab $AB = a$ stützt sich in seinem unteren Endpunkte A gegen eine vertikale Ebene, ruht in C auf einem festen Punkt und trägt in B ein Gewicht $= Q$. Bestimme $AC = x$ und den Neigungswinkel α, den AB mit dem Horizont machen muß, damit Gleichgewicht stattfinde, wenn der feste Punkt C von der vertikalen Ebene einen Abstand $= b$ hat.

47. Ein homogener Stab $AB = a$ von P ℔ Gewicht kann sich in A um eine feste Charnier frei drehen, während er in B mittelst eines über eine Rolle geführten Fadens durch das Gewicht Q getragen wird. Bestimme die Winkel α und β, welche Stab und Faden mit dem Horizont im Zustande des Gleichgewichts bilden.

48. Ein homogenes Trapez von P ℔ Gewicht ruht mit seinen parallelen Seiten a und b auf zwei glatten schiefen Ebenen von der Neigung α und β. Welches ist der Neigungswinkel γ des Trapezes gegen den Horizont im Zustande des Gleichgewichts, wenn h die Höhe des Trapezes ist?

49. Im Innern einer Hohlkugel ruht eine homogene P ℔ schwere Platte von der Form eines gleichschenkeligen Dreieckes. Bestimme den Winkel α, welchen das $\triangle$ mit dem Horizont macht, aus der Seite a, der Höhe h und dem Kugelradius r.

VI. Gleichgewicht an Maschinen.

a) Mathematischer Hebel.

50. Ein zweiarmiger Hebel AB trägt P ℔ an dem einen

Arm = a' und Q ℔ an dem andern Arm = b'. Wie groß ist Q, sowie der Druck D auf den Stützpunkt, wenn

1) $P = 14{,}8$;	2) $P = 25\frac{1}{4}$;	3) $P = 12\frac{1}{2}$;	4) $P = 18\frac{3}{4}$
$a = 6$	$a = 5\frac{1}{3}$	$a = 7{,}5$	$a = 3{,}2$
$b = 3\frac{1}{3}$	$b = 4\frac{1}{6}$	$b = 2{,}5$	$b = 0{,}75$.

51. An dem Endpunkte des einarmigen Hebels AB = a hält eine vertikale Kraft P der Last Q Gleichgewicht. Bestimme den Angriffspunkt C der Last, wenn

1) $P = 9{,}25$;	2) $P = 17{,}13$;	3) $P = 12{,}15$;	4) $P = 22{,}8$
$Q = 27{,}75$	$Q = 68{,}72$	$Q = 48{,}6$	$Q = 114$
$a = 3{,}9$	$a = 4\frac{1}{2}$	$a = 3\frac{1}{2}$	$a = 1{,}5$

52. Wie groß ist in der vorhergehenden Angabe der Druck im Unterstützungspunkt?

53. Ein Hebel AB = a trägt an seinen Endpunkten die Gewichte P und Q im Gleichgewicht. Wo liegt der Stützpunkt, wenn

1) $P = 17{,}6$;	2) $P = 39{,}4$;	3) $P = 23{,}7$;	4) $P = 55{,}36$
$Q = 22{,}4$	$Q = 20{,}6$	$Q = 26{,}3$	$Q = 44{,}64$
$a = 7{,}2$	$a = 5{,}4$	$a = 4\frac{1}{2}$	$a = 7{,}5$

54. Die zwei Arme eines Hebels, welche sich wie a : b verhalten, tragen an ihren Endpunkten zusammen eine Last = Q. Wie viel Gewicht trägt jeder im Zustande des Gleichgewichts, wenn

1) $Q = 73{,}8$;	2) $Q = 45{,}5$;	3) $Q = 151{,}2$;	4) $Q = 46$
$a = 3{,}3$	$a = 2{,}9$	$a = 3{,}7$	$a = 1\frac{1}{3}$
$b = 2{,}7$	$b = 3{,}6$	$b = 1{,}9$	$b = 2\frac{1}{2}$

55. An einem horizontalen Stabe AB ist im Punkte C eine Last = Q so aufgehängt, daß die Proportion AC : BC = a : b stattfindet. Wie groß ist der Druck in A und B, wenn

1) $a = 1{,}4$;	2) $a = 2{,}3$;	3) $a = 0{,}95$;	4) $a = 2{,}45$
$b = 3{,}6$	$b = 3{,}5$	$b = 1{,}43$	$b = 1{,}13$
$Q = 35{,}5$	$Q = 52{,}2$	$Q = 119$	$Q = 179$

56. An einer unrichtigen Krämerwage wiegt ein Gegenstand P ℔ in der einen Wagschale, dagegen Q ℔ in der andern. Welches ist das wahre Gewicht G, wenn

1) $P = 2\frac{5}{8}$;	2) $P = 3\frac{3}{8}$;	3) $P = 18\frac{3}{4}$;	4) $P = 11\frac{1}{4}$;	5) $P = 13\frac{1}{3}$
$Q = 3\frac{3}{7}$	$Q = 2\frac{2}{3}$	$Q = 16\frac{1}{3}$	$Q = 8\frac{8}{9}$	$Q = 16\frac{7}{8}$

57. In der Wagschale einer Dezimalwage hält ein Knabe einem Manne auf der Brücke das Gleichgewicht; sitzt aber der Mann in der Wagschale und der Knabe auf der Brücke, so muß der Knabe noch 1188 ℔ zu sich nehmen, um Gleichgewicht zu halten. Wie schwer ist jeder?

58. An den Schenkeln eines rechten Winkels ACB in einer vertikalen Ebene sind in A und B die Gewichte P und Q angebracht. Welche Neigung hat der Schenkel AC gegen den Horizont im Zustande des Gleichgewichts, wenn C Stützpunkt ist und

1) $AC = 3,7$;	$BC = 4,9$;	$P = 12$;	$Q = 15,8$
2) $AC = 0,98$;	$BC = 1,35$;	$P = 9,72$;	$Q = 7,33$
3) $AC = 2,77$;	$BC = 0,84$;	$P = 32,9$;	$Q = 73,5$

b) Physischer Hebel.

59. Ein prismatischer homogener Hebel AB = a wiegt p ℔ und trägt an seinen Endpunkten A und B die Gewichte P und Q und hat seinen Unterstützungspunkt in C. Wie groß ist Q im Falle des Gleichgewichts, wenn

1) $P = 15$;	2) $P = 43,8$;	3) $P = 9,4$;	4) $P = 31,5$
$p = 1,2$	$p = 0,9$	$p = 3,2$	$p = 1,8$
$a = 4$	$a = 3,7$	$a = 2,8$	$a = 3,6$
$AC = 3$	$AC = 2,2$	$AC = 1,2$	$AC = 1,6$

60. Wo ist in der vorigen Aufgabe der Unterstützungspunkt, wenn gegeben ist

1) $P = 9,8$;	2) $P = 13,5$;	3) $P = 9,3$;	4) $P = 24,3$
$Q = 9,2$	$Q = 17,2$	$Q = 15,2$	$Q = 14,4$
$p = 1$	$p = 1,3$	$p = 1,5$	$p = 1,3$
$a = 3,2$	$a = 4,8$	$a = 2,6$	$a = 2,4$

61. Ein prismatischer homogener Hebel AB = a vom Gewichte = p kann sich in A in einer festen Charnier frei bewegen und soll durch eine in B angreifende Kraft P horizontal

getragen werden. Wie groß ist der Winkel α, den P mit dem Horizont macht, wenn

1) $P = 5,2$; 2) $P = 12,7$; 3) $P = 14,36$; 4) $P = 9,72$
$p = 5,2$ $p = 19,8$ $p = 23,8$ $p = 13,85$

62. Welches ist in der vorigen Aufgabe das Gewicht des Hebels, wenn

1) $P = 3,36$; 2) $P = 15,9$; 3) $P = 5,39$; 4) $P = 7,94$
$\alpha = 25^{0}9'$ $\alpha = 75^{0}31'$ $\alpha = 62^{0}41'$ $\alpha = 47^{0}33'$

63. Welches ist in den beiden vorhergehenden Aufgaben der horizontale und vertikale Widerstand des Gewindes?

64. Zwei Arbeiter tragen an einer cylindrischen Stange, welche 32 ℔ wiegt und 8 Fuß lang ist eine Last Q = 192 ℔. Wie viel hat der Stärkere zu tragen und in welchem Punkte ist die Last anzubringen, wenn der Schwächere 88 ℔ tragen soll, und welchen Einfluß hat die Länge der Stange?

65. Welchen Druck bringt das Gewicht P = 10 ℔ im Punkte A des Hebels AB auf ein Sicherheitsventil in C hervor, wenn AB = 18 Zoll, BC = 2 Zoll, die Entfernung BD des Schwerpunktes D vom Drehpunkt B 8 Zoll und das Gewicht des Hebels 2 ℔ beträgt?

c) Rad an der Welle.

66. Welche Kraft P hält an einem Haspel (siehe Fig. 25 § 79) einer Last Q Gleichgewicht, wenn a die Länge der Kurbel und r der Radius der Welle ist, für den Fall, daß

1) $Q = 87,4$; 2) $Q = 108,8$; 3) $Q = 73,5$; 4) $Q = 175,5$
$a = 0,9$ $a = 1,2$ $a = 1,5$ $a = 1,17$
$r = 0,27$ $r = 0,3$ $r = 0,18$ $r = 0,24$

67. Bei einer Winde (§ 83) sei R der Radius des Rades, r jener der Radwelle, r_1 jener der Kurbelwelle und a die Kurbellänge. Welche Kraft P hält einer Last Q Gleichgewicht, wenn

1) $R = 0,8$; $r = 0,28$; $r_1 = 0,3$; $a = 1,4$; $Q = 512$
2) $R = 0,73$; $r = 0,35$; $r_1 = 0,27$; $a = 1,9$; $Q = 365$
3) $R = 1,24$; $r = 0,32$; $r_1 = 0,32$; $a = 1,6$; $Q = 744$
4) $R = 1,35$; $r = 0,25$; $r_1 = 0,3$; $a = 1,5$; $Q = 648$

68. Wie groß ist in der vorigen Aufgabe der Radius des Rades zu nehmen, wenn ein mittlerer Mann (= 100 ℔) einer Last Q Gleichgewicht halten soll und

1) $Q = 1080$; $r = 0{,}4$; $r_1 = 0{,}3$; $a = 1{,}2$
2) $Q = 1560$; $r = 0{,}35$; $r_1 = 0{,}4$; $a = 1{,}3$
3) $Q = 3360$; $r = 0{,}25$; $r_1 = 0{,}32$; $a = 1{,}4$
4) $Q = 2610$; $r = 0{,}45$; $r_1 = 0{,}4$; $a = 1{,}5$

69. Welche Last Q kann ein mittlerer Mann mittelst eines Bauaufzuges (§ 84) heben, wenn

1) $R = 0{,}87$; $r = 0{,}32$; $r_1 = 0{,}29$; $a = 1{,}6$
2) $R = 1{,}24$; $r = 0{,}35$; $r_1 = 0{,}31$; $a = 1{,}4$
3) $R = 1{,}48$; $r = 0{,}4$; $r_1 = 0{,}37$; $a = 1{,}36$

70. In welchem Verhältniß steht die Kraft P zur Last Q, wenn an einem Krahn die Radien der drei Wellen $r = r_1 = r_2$ sowie $R = R_1 = a$ und außerdem die Kurbelwelle mit 12 und das davon getriebene Rad mit 144 Zähnen versehen ist?

71. An einem Flaschenzuge (§ 81) trägt die bewegliche Flasche n Rollen. Welche Kraft P wird der Last Q Gleichgewicht halten, wenn

1) $Q = 216$;	2) $Q = 512$;	3) $Q = 625$;	4) $Q = 648$
$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$

72. Welche Last Q kann ein mittlerer Mann mittelst eines Flaschenzuges heben, wenn das Seil 20 ℔ und die untere Flasche 32 ℔ wiegt und

1) $n = 3$; 2) $n = 5$; 3) $n = 12$ ist.

73. Wie viele Arbeiter sind nöthig mit dem vorigen Flaschenzug eine Last Q zu heben, wenn

1) $Q = 568$;	2) $Q = 1568$;	3) $Q = 768$;	3) $Q = 968$
$n = 3$	$n = 4$	$n = 2$	$n = 5$

74. Ein Potenzflaschenzug (§ 82) bestehe aus n beweglichen Rollen; welche Kraft P hält der Last Q Gleichgewicht, wenn jede Rolle 3 ℔ wiegt und

1) $Q = 91$;	2) $Q = 415$;	3) $Q = 2355$;	4) $Q = 5348$
$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$

75. Welche Last Q kann ein mittlerer Mann mittelst des vorigen Zuges haben, wenn

1) $n = 2$; 2) $n = 3$; 3) $n = 4$; 4) $n = 5$ ist.

76. Wie viele Rollen muß ein Potenzflaschenzug haben, damit ein mittlerer Mann die Last Q heben kann, wenn jede Rolle 3 ℔ wiegt und

1) $Q = 3200$; 2) $Q = 12800$; 3) $Q = 1664$.

d) Schiefe Ebene, Keil und Schraube.

77. Die Basis einer schiefen Ebene sei mit b (§ 86), die Höhe mit h und ihre Neigung gegen den Horizont mit α bezeichnet. Welche Kraft P hält die Last Q auf einer schiefen Ebene Gleichgewicht, wenn P 1) der schiefen Ebene, 2) der Basis ∥ wirkt, im Falle

1) $Q = 750$;	2) $Q = 364$;	3) $Q = 625$;	4) $Q = 310,8$
$h = 6$	$h = 5$	$h = 7$	$h = 12$
$b = 8$	$b = 12$	$b = 24$	$b = 35$

78. Wie groß ist in der vorhergehenden Aufgabe der Druck D auf die schiefe Ebene?

79. Welche Kraft P hält der Last Q auf einer schiefen Ebene Gleichgewicht, sowohl wenn P der schiefen Ebene, als auch der Basis ∥ ist, im Falle

1) $Q = 351,6$;	2) $Q = 492,5$;	3) $Q = 590,7$;	4) $Q = 729,6$
$\alpha = 15^0 27'$	$\alpha = 23^0 41'$	$\alpha = 19^0 45'$	$\alpha = 17^0 39'$

80. Welchen Druck hat die Ebene in jedem Falle der vorausgehenden Aufgabe auszuhalten?

81. Welchen Werth nimmt P und D in der Aufgabe 79 an, wenn die Richtung von P mit der schiefen Ebene einen Winkel $\beta = +3^0 25'$, oder $\beta = -3^0 25'$ einschließt?

82. Eine Kraft P, deren Richtung der schiefen Ebene ∥ ist, hält einer Last Q Gleichgewicht. Wie groß ist die Last Q und ihr Druck D auf die schiefe Ebene, wenn

1) $P = 47,8$;	2) $P = 395,9$;	3) $P = 531,6$;	4) $P = 627,5$
$\alpha = 9^0 26'$	$\alpha = 7^0 32'$	$\alpha = 15^0 22'$	$\alpha = 13^0 52'$

83. Wie groß ist die Last Q und ihr Druck D, wenn in der vorigen Aufgabe die Kraft P der Basis $\parallel$ wirkt?

84. Wie groß ist die Neigung α einer schiefen Ebene, auf welcher eine Last Q von einer zur schiefen Ebene parallelen Kraft P im Gleichgewicht erhalten wird, wenn

1) $P = 57{,}8$; 2) $P = 129{,}4$; 3) $P = 85{,}3$; 4) $P = 141{,}8$
$Q = 132{,}6$ $\quad Q = 320{,}5$ $\quad Q = 157{,}4$ $\quad Q = 357{,}8$

85. Eine Last Q, welche von einer Kraft P auf einer schiefen Ebene im Gleichgewicht gehalten wird, übt einen Druck $= D$ auf die Ebene. Wie groß ist P und Q, wenn P $\parallel$ der schiefen Ebene wirkt und

1) $D = 83{,}5$; 2) $D = 122{,}8$; 3) $D = 95{,}8$; 4) $D = 72{,}4$
$\alpha = 14^0 31'$ $\quad \alpha = 21^0 27'$ $\quad \alpha = 17^0 14'$ $\quad \alpha = 19^0$

86. Wie viele Arbeiter können einen schweren Wagen von Q ℔ auf einer schiefen Ebene, deren Steigung beziehungsweise Gefäll $=$ a, am Herablaufen hindern, wenn

1) $Q = 4200$; 2) $Q = 7500$; 3) $Q = 6800$; 4) $Q = 6500$
$a = \frac{2}{100}$ $\quad a = \frac{3}{100}$ $\quad a = \frac{34}{1000}$ $\quad a = \frac{39}{1000}$

87. Ein schwerer Körper Q wird auf einer schiefen Ebene von drei gleichen Kräften $= \frac{1}{3}$ Q, welche horizontal, vertikal und der schiefen Ebene $\parallel$ wirken, im Gleichgewicht gehalten. Welches ist die Neigung α?

88. Ein schwerer Körper Q wird von den zwei Kräften P, P_1 auf einer schiefen Ebene im Gleichgewicht gehalten. Wie groß muß Q sein, wenn P $\parallel$ der Basis und P_1 $\parallel$ der schiefen Ebene wirkt?

89. Ein frei hängendes Gewicht Q hält das Gewicht P mittelst eines Fadens, der über die Rolle D geführt ist, auf einer schiefen Ebene LM von der Neigung α in Ruhe. Bestimme den Winkel β, welchen der Faden DP mit LM macht, sowie den Druck D, welchen P auf LM ausübt, aus den Größen P, Q und α.

90. Auf zwei festverbundenen schiefen Ebenen mit gemeinschaftlicher Höhe $h = 5'$ werden zwei Kugeln vom Gewichte P und Q mittelst eines Fadens, der sie fest verbindet, im Gleich-

gewichte gehalten. In welchem Verhältnisse stehen die Gewichte P und Q, wenn die Basen beziehungsweise 12′ und $6\frac{2}{3}$′ sind?

91. Ein vertikal stehender Keil, dessen Rücken — b Zoll und Seitenlänge = s″, trägt auf seinem Rücken eine Last = Q. Wie groß ist der Seitendruck D, dem der Keil das Gleichgewicht hält, wenn

1) Q = 560;	2) Q = 940;	3) Q = 850;	4) Q = 790
s = 9,5	s = 8,6	s = 7,8	s = 9,4
b = 2,2	b = 1,9	b = 2	b = 2,5

92. Welchen Druck kann ein mittlerer Mann mit einer Schraube, deren Gangweite = h und Spindelradius = r ist, hervorbringen, wenn die Spindel mit einem Hebelarme = a gedreht wird, im Falle

1) h = 0,3″;	2) h = 0,4″;	3) h = 0,5″;	4) h = 0,2″
r = 2″	r = 3″	r = 4″	r = 5″
a = 15″	a = 14″	a = 16″	a = 21″

93. Wie groß ist in der vorhergehenden Aufgabe der Druck, wenn der Reibungscoeffizient = $\frac{1}{10}$ gesetzt wird?

B. Aufgaben aus der Dynamik.

I. Gleichförmige Bewegung.

1. Welches ist die mittlere Geschwindigkeit eines Eilwagens, welcher eine Meile (= 24000 Fuß) in 50 Minuten zurücklegt?

2. Welches ist die mittlere Geschwindigkeit eines Flusses, wenn ein schwimmender Körper in 10 Minuten eine Strecke = 2700′ zurücklegt?

3. Welches ist die lineare und Winkelgeschwindigkeit eines Rades vom Radius r = 5′, wenn sich dasselbe in 1 Minute 24mal umdreht?

4. Welches ist die mittlere Geschwindigkeit eines Eilzuges, welcher 1 Meile in 10 Minuten zurücklegt?

5. Wann und wo decken sich der Minuten- und Stundenzeiger einer Uhr?

6. Um 5^h geht ein Bote ab, welcher in 4 Stunden drei Meilen macht, um 8^h wird ihm ein Kurier nachgeschickt, welcher den Boten in 5 Stunden einholen soll. Wieviele Meilen muß der Kurier in 1 Stunde zurücklegen?

7. Um 5^h geht in A ein Güterzug ab und macht sammt Aufenthalt 1 Meile in 25 Minuten; um 10^{h}25′ geht in derselben Richtung in A ein Eilzug ab und macht 1 Meile in 12 Minuten. Wann und wo wird der Eilzug den Güterzug einholen?

8. Von A nach B geht ein Postzug um 6^h ab und macht 1 Meile in 15 Minuten; um 9^h geht von B nach A ein Eilzug ab und macht 1 Meile in 12 Minuten. Wann und wo begegnen sie sich, wenn AB = 45 Meilen ist?

9. Von A nach B geht um 5^h ein Eilzug ab und macht 1 Meile in 12 Minuten; um 7^h 24′ geht von B nach A ein Postzug ab und macht 1 Meile in 15 Minuten. Wie weit ist von A nach B, wenn beide Züge um 10^h 24′ sich begegnen?

10. Ein Postzug braucht von Würzburg nach Bamberg 3 St. 9 M., wenn er 1 Meile in 14 Minuten macht. Wie schnell fährt ein Kurierzug, wenn er hiezu nur 2 St. 15 M. braucht?

11. Um 10^h geht in A ein Güterzug ab und macht 1 Meile in 24 Minuten; um 3^h 36′ geht in derselben Richtung ein Eilzug ab, welcher ersteren in einer Entfernung von 24 Meilen einholt. Welches ist die Geschwindigkeit des Eilzuges?

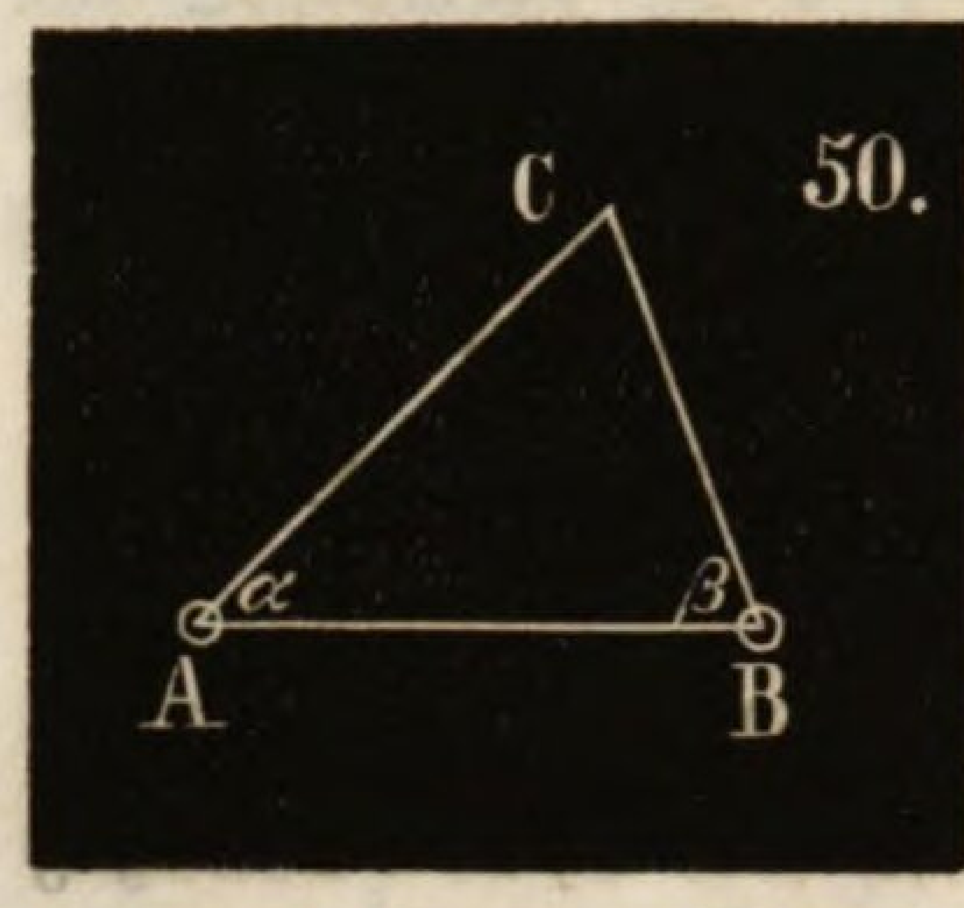
12. Ein Dampfboot hat bei ein und derselben Dampfkraft und Beladung stromabwärts eine Geschwindigkeit = 16′, stromaufwärts = 8′. Welches ist die Stromgeschwindigkeit, sowie die der Dampfkraft?

13. Ein Kahn sucht mit einer Geschwindigkeit v = 5′ senkrecht zur Strömung das jenseitige Ufer eines 4520′ breiten Flusses zu gewinnen. Welches ist die Stromgeschwindigkeit, wenn der Kahn bei der Landung 1715′ abwärts getrieben wurde?

14. Ein Dampfboot hat stromabwärts eine Geschwindigkeit v = 22′. In welcher Richtung muß dasselbe steuern, wenn

es in t Sekunden eine Strombreite von 580′ gewinnen will, im Falle

1) $t = 240$; 2) $t = 290$; 3) $t = 320$; 4) $t = 420$.



15. Zwei Punkte A und B (Fig. 50), welche eine Entfernung $AB = b$ haben, bewegen sich in der Richtung AC und BC mit der Geschwindigkeit v und v_1. Wie groß muß v_1 sein, damit sich beide Punkte in C begegnen, und in welcher Zeit t wird dies geschehen, wenn

1) $v = 25$ *); $b = 7480$; $\alpha = 67^0$; $\beta = 79^0 30'$
$v = 37$; $b = 8590$; $\alpha = 90^0$; $\beta = 71^0 42'$
$v = 48$; $b = 9260$; $\alpha = 73^0$; $\beta = 69^0 53'$

16. Während ein Punkt mit der Geschwindigkeit v in der Zeit t von A nach B gelangt, bewegt sich in einer auf AB senkrechten Geraden CA gleichzeitig ein anderer Punkt von C nach D mit der Geschwindigkeit v_1. Sei Winkel $ABC = \alpha$ und $ABD = \beta$, so wird gefragt, wie groß ist der Winkel β, unter welchem Punkt D von B aus gesehen wird, wenn

1) $t = 3{,}25$; $v = 412$; $v_1 = 3590$; $\alpha = 82^0 40'$
2) $t = 5{,}92$; $v = 954$; $v_1 = 7380$; $\alpha = 85^0 30'$
3) $t = 0{,}75$; $v = 4322$; $v_1 = 32600$; $\alpha = 89^0 32'$

17. Wie lange braucht ein Lichtstrahl von der Sonne zur Erde, wenn die Geschwindigkeit des Lichtes = 40000 geogr. Meilen und die Entfernung der Erde von der Sonne 20 Millionen Meilen beträgt?

18. Wie lange braucht ein Lichtstrahl von einem Fixstern zur Erde, welcher 21728mal so weit entfernt ist als die Sonne von der Erde?

---

*) Ueberall wo die Längeneinheit nicht beigesetzt ist, ist immer der Fuß gemeint.

II. Gleichförmig beschleunigte Bewegung*).

19. Wie groß ist die Endgeschwindigkeit v und der Fallraum s, den ein freifallender Körper in t Sekunden zurücklegt, wenn

1) $t = 5,4$; 2) $t = 9,5$; 3) $t = \sqrt{g}$; 4) $t = \sqrt{2\pi}$.

20. In welcher Zeit t und mit welcher Endgeschwindigkeit v fällt ein Körper von der Höhe h, wenn

1) $h = 224$; 2) $h = 739$; 3) $h = 1280$; 4) $h = 5620$.

21. Ein Körper hat im freien Fall eine Geschwindigkeit = v erlangt; welchen Werth hat s und t, wenn

1) $v = 134,432$; 2) $v = 632$; 3) $v = 337,4$; 4) $v = 336,08$.

22. Ein senkrecht in die Höhe geworfener Körper fällt nach t Sekunden zur Erde; welches ist die erlangte Höhe und welches die Wurfgeschwindigkeit, wenn

1) $t = 5$; 2) $t = 6,2$; 3) $t = 15$; 4) $t = 42$.

23. Mit welcher Geschwindigkeit v muß ein Körper senkrecht in die Höhe geworfen werden, um die Höhe h zu erreichen, wenn

1) $h = 450$; 2) $h = 1230$; 3) $h = 2480$; 4) $h = 5960$.

24. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit v senkrecht in die Höhe geworfen. Wie hoch steigt er und wann fällt er zur Erde, wenn

1) $v = 780$; 2) $v = 1040$; 3) $v = 620$; 4) $v = 1270$.

25. In welcher Zeit und mit welcher Endgeschwindigkeit rollt eine Kugel, von der Ruhe ausgehend, mit einer Beschleunigung = a über eine schiefe Ebene von der Länge = s, und welche Neigung hat die Ebene gegen den Horizont, wenn

1) $a = 10$; 2) $a = 12$; 3) $a = 15$; 4) $a = 7,2$
$s = 320$ $s = 460$ $s = 940$ $s = 1280$

26. Welche Neigung und Länge hat eine schiefe Ebene, über welche eine Kugel mit der Beschleunigung a in der Zeit t rollt, und welche Geschwindigkeit hat sie erlangt, wenn

---

*) Ueberall, wo keine Beschleunigung angegeben ist, soll $g = 33,608'$ $= 9,80896^m$ genommen werden.

1) $a = 5{,}8$; 2) $a = 7{,}4$; 3) $a = 6{,}5$; 4) $a = 10{,}6$
$t = 12$ $t = 15$ $t = 33$ $t = 45$

27. Mit welcher Beschleunigung nnd in welcher Zeit rollt eine Kugel über eine schiefe Ebene von der Länge s und der Neigung α, wenn

1) $s = 592$; 2) $s = 1229$; 3) $s = 1530$; 4) $s = 2135$
$\alpha = 14^0 24'$ $\alpha = 16^0 40'$ $\alpha = 12^0 52'$ $\alpha = 17^0 29'$

28. In einem vertikalen Kreise vom Radius r (Fig. 43 pag. 73) ist ein Faden von der Länge s als Sehne gespannt und eine im Centrum durchbrochene Kugel so angebracht, daß sie herabgleiten kann. In welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit wird sie den tiefsten Punkt erreichen, wenn

1) $r = 12$; 2) $r = 48$; 3) $r = 32$; 4) $r = 25$
$s = 9$ $s = 15$ $s = 42$ $s = 37$

29. Welches ist in der vorhergehenden Aufgabe die Länge des Fadens und welches die Beschleunigung a, wenn

1) $r = 33{,}609$; 2) $r = 42{,}6$; 1) $r = 29$; 4) $r = 53{,}8$
$v = 24{,}5$ $v = 32{,}4$ $v = 30{,}5$ $v = 41{,}5$

30. Wie verhalten sich die Geschwindigkeiten v und v_1, welche zwei Körper im Fallen oder Rollen über zwei schiefe Ebenen erlangen, deren Höhen sich verhalten, wie 25 : 36?

31. Mit welcher Geschwindigkeit muß eine Kugel längs einer schiefen Ebene von der Länge s und Neigung α geworfen werden, damit sie den höchsten Punkt erreicht und auch wieder zurückkehrt, wenn

1) $s = 750$; 2) $s = 1096$; 3) $s = 1260$; 4) $s = 1450$
$\alpha = 12^0 27'$ $\alpha = 15^0 42'$ $\alpha = 18^0 30'$ $\alpha = 16^0 53'$

32. Eine Kugel wird mit einer Geschwindigkeit = v längs einer schiefen Ebene von der Neigung α aufwärts geworfen. Welche Höhe erreicht sie und wann kehrt sie wieder zurück, wenn

1) $v = 639$; 2) $v = 980$; 3) $v = 1240$; 4) $v = 1080$
$\alpha = 20^0 18'$ $\alpha = 12^0 40'$ $\alpha = 15^0 33'$ $\alpha = 24^0 20'$

33. Welches ist die Wurfgeschwindigkeit und Höhe, welche die Kugel in der vorigen Aufgabe erreicht, wenn gegeben ist α und die Zeit t der Rückkehr, im Falle

1) $t = 40$; 2) $t = 52$; 3) $t = 54{,}5$; 4) $t = 58$
$\alpha = 13^0$ $\alpha = 22^0$ $\alpha = 31^0 27'$ $\alpha = 19^0$

34. Welche Geschwindigkeit und welchen Fallraum erreichen an der Atwoodschen Fallmaschine (§ 123) zwei Gewichte P und Q in der Zeit t, wenn

1) $P = 2{,}6$; 2) $P = 3{,}8$; 3) $P = 5.4$; 4) $P = 6{,}4$
$Q = 1{,}4$ $Q = 2{,}2$ $Q = 4{,}6$ $Q = 5{,}6$
$t = 2{,}5$ $t = 1{,}6$ $t = 3{,}2$ $t = 3{,}5$

35. Welches ist die Beschleunigung der Schwerkraft an 4 verschiedenen Orten der Erde, wenn an der Atwoodschen Fallmaschine zwei Gewichte *) P und Q in der Zeit t den Fallraum s zurücklegen, im Falle

1) $P = 3{,}4$; 2) $P = 6{,}3$; 3) $P = 11{,}2$; 4) $P = 9{,}75$
$Q = 2{,}6$ $Q = 3{,}7$ $Q = 8{,}8$ $Q = 8{,}25$
$s = 8{,}96$ $s = 39{,}195$ $s = 32{,}16$ $s = 22{,}32$
$t = 2$ $t = 3$ $t = 4$ $t = 4$

36. Auf einer glatten horizontalen Ebene wird eine ohne Reibung bewegliche Last Q von dem freihängenden Gewichte P (§ 123) mittelst eines Fadens in Bewegung gesetzt. Welches ist die erlangte Geschwindigkeit, sowie der zurückgelegte Weg in der Zeit t, wenn

1) $P = 3{,}5$; 2) $P = 4{,}6$; 3) $P = 25{,}6$; 4) $P = 9{,}4$
$Q = 8{,}5$ $Q = 15{,}4$ $Q = 14{,}4$ $Q = 10{,}6$
$t = 6$ $t = 4$ $t = 5$ $t = 3$

37. In welchem Verhältnisse sind in der vorigen Aufgabe P und Q zu nehmen, damit eine Beschleunigung = a erzeugt wird, wenn

1) $a = 12{,}603$; 2) $a = 8{,}402$; 3) $a = 21{,}005$; 4) $a = 25{,}206$.

38. In welcher Zeit und mit welcher Endgeschwindigkeit legt in der Aufg. 36 das Gewicht P einen Fallraum = s zurück, wenn

---

*) Da die Gewichte sich gleichfalls ändern, so wird vorausgesetzt, daß sie jedesmal am Ort der Beobachtung bestimmt worden sind.

1) P = 15:	2) P = 30,49:	3) P = 162,65:	4) P = 53,62
Q = 11	Q = 11,50	Q = 47,4	Q = 30,4
s = 105	s = 73,6	s = 94,8	s = 97,28

39. Zwei mittelst eines Fadens verbundene Kugeln A und B, vom Gewichte P und Q ℔ werden (analog Aufg. 90 pag. 105) auf zwei schiefe Ebenen mit gemeinschaftlcher Höhe so gelegt, daß die schwerere Kugel A auf der einen Ebene von der Neigung α zuhöchst und B auf der andern von der Neigung β zu unterst zu liegen kommt. Mit welcher Geschwindigkeit und in welcher Zeit wird A die Kugel B (vorausgesetzt, daß es möglich ist) längs der ganzen Ebene = s emporziehen, wenn

1) P = 2,4:	2) P = 3,5:	3) P = 1,8:	4) P = 4,6
Q = 0,8	Q = 1,2	Q = 0,9	Q = 2,5
$\alpha = 20^0$	$\alpha = 24^0$	$\alpha = 18^0$	$\alpha = 28^0$
$\beta = 9^0$	$\beta = 13^0$	$\beta = 7^0$	$\beta = 14^0$
s = 36	s = 42	s = 25	s = 20

40. Welches Gewicht muß in der vorigen Aufgabe an die Stelle von Q gebracht werden, damit das Gewicht P in der nämlichen Zeit von Q wieder emporgezogen werde an seine ursprüngliche Stelle?

41. Welches Gewicht P ist in Aufg. 39 anzuwenden, um Q in der Zeit t bis an den höchsten Punkt empor zu ziehen, wenn alle übrigen Größen dieselben bleiben, im Falle

1) t = 24; 2) t = 87; 3) t = 124; 4) t = 136.

42. Ein Eilzug vom Gewichte Q ℔ hat eine Geschwindigkeit = v erlangt. Welche Strecke legt er noch bei abgesperrtem Dampfe zurück, wenn der Reibungswiderstand $\frac{1}{200}$ vom ganzen Gewichte beträgt, falls

1) Q = 206900;	2) Q = 165000;	3) Q = 142600
v = 40	v = 38	v = 36

43. Welche Geschwindigkeit hat nach der vorigen Aufgabe ein Eilzug erlangt, wenn derselbe bei abgesperrtem Dampfe noch eine Strecke = s zurücklegt, im Falle

1) Q = 100000;	2) Q = 98000;	3) Q = 112000
s = 4500	s = 5600	s = 4800

44. Wie groß muß das Gefäll eines Bahnkörpers sein, damit der Reibungswiderstand der Fallgeschwindigkeit gleich werde?

45. Welchen Verlust an Geschwindigkeit erleidet ein Bahnzug in t Sekunden, wenn er eine Steigung = h passirt, im Falle

1) $t = 245$; 2) $t = 190$; 3) $t = 230$; 4) $t = 280$
$h = \frac{1}{150}$ $h = \frac{1}{180}$ $h = \frac{1}{240}$ $h = \frac{1}{350}$

46. Wann würde ein Bahnzug, dessen constante Geschwindigkeit = v ist, bei unveränderter Dampfkraft stille stehen, wenn die zu bewegende Last verdoppelt würde, im Falle

1) $v = 32$; 2) $v = 35$; 3) $v = 36$; 4) $v = 24$

47. Eine Kugel rollt über eine schiefe Ebene von der Länge s und Neigung α, von da unmittelbar über eine zweite von der Länge s_1 und Neigung β. In welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit erreicht die Kugel das Ende der zweiten. Ebene, wenn

1) $s = 12$; 2) $s = 15$; 3) $s = 25$; 4) $s = 21$
$\alpha = 16^0$ $\alpha = 14^0$ $\alpha = 9^0$ $\alpha = 17^0$
$s_1 = 22$ $s_1 = 19$ $s_1 = 17$ $s_1 = 18$
$\beta = 17^0$ $\beta = 8^0$ $\beta = 15^0$ $\beta = 13^0$

48. Welche Werthe nimmt Zeit und Geschwindigkeit an, wenn in der vorhergehenden Aufgabe an die Stelle der zwei Ebenen zwei gleiche Sehnen $AB = BC$ eines vertikalen Kreises vom Radius r in der Weise treten, daß C der tiefste Punkt des Kreises und Bogen $AC = \frac{r\pi}{2}$ ist, im Falle

1) $r = 18$; 2) $r = 13$; 3) $r = 9$; 4) $r = 24$

49. Bestimme Zeit und Geschwindigkeit, mit welcher ein schwerer Punkt die drei aufeinander folgenden Seiten eines regulären Zwölfeckes im Fallen durchläuft, wenn der letzte Punkt zugleich der tiefste Punkt des umschriebenen vertikalen Kreises ist, im Falle der Radius r desselben

1) $r = 15$; 2) $r = 27$; 3) $r = 38$; $r = 29$

50. Ein Stein fällt 120′ vom Thurme auf das Dach einer Kirche, rollt über dasselbe und fällt noch einmal 60′.

In welcher Zeit kommt er auf dem Boden an, wenn das Dach 200′ lang ist und eine Neigung = 60° hat?

51. Wie groß berechnet sich die Tiefe einer Höhle, wenn man einen hinabfallenden Stein erst nach t Sekunden auffallen hört und wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles = 1050′ angenommen wird, im Falle

1) t = 12; 2) t = 15; 3) t = 21; 4) t = 25.

52. Wie groß berechnet sich die Schallgeschwindigkeit, wenn man einen Stein in einem 1292,2′ tiefen Schacht nach 10 Sekunden auffallen hört?

III. Wurfbewegung.

53. Auf der Spitze eines Berges, der sich h Fuß über den Horizont erhebt, wird eine Büchse horizontal losgeschossen. Wann und wo fällt die Kugel nieder, wenn sie den Lauf der Büchse mit einer Geschwindigkeit = 1200′ verläßt, im Falle*)

1) h = 900; 2) h = 1500; 3) h = 1200; 4) h = 1800.

54. Wo befindet sich in der vorhergehenden Aufgabe die Kugel nach Verlauf von 5 Sekunden?

55. Mit welcher Geschwindigkeit wird in einer senkrechten Erhebung h über den Horizont ein Stein horizontal geschleudert, wenn er beim Niederfallen eine Wurfweite = x erreicht, im Falle

1) x = 600; 2) x = 1100; 3) x = 1200; 4) x = 1260
h = 420 h = 750 h = 840 h = 1090.

56. Wie tief sinkt eine mit 1200′ Geschwindigkeit abgeschossene Büchsenkugel auf eine Entfernung von 540 Schritten à 2,3 Fuß?

57. Ein schwerer Punkt schwingt an einem 1 Fuß langen Faden in einer vertikalen Ebene bei einem Ausschlagwinkel = α. Wo würde der Punkt nach 3 Sekunden sich befinden, wenn er in dem Augenblicke vom Faden getrennt würde, als er den tiefsten Schwingungspunkt erreicht hat, im Falle

---

*) Der Widerstand der Luft wird hier wie in allen folgenden Beispielen außer Acht gelassen.

1) $l = 5{,}4$; 2) $l = 6{,}8$; 3) $l = 5{,}9$; 4) $l = 12$
$\alpha = 30^0$ $\alpha = 42^0$ $\alpha = 25^0$ $\alpha = 46^0$

58. Mit welcher Geschwindigkeit wird ein schwerer Gegenstand horizontal geschleudert, wenn er auf eine Entfernung $= x$ um y Fuß sinkt, im Falle
1) $x = 950$; 2) $x = 640$; 3) $x = 860$; 4) $x = 750$
$y = 228$ $y = 215$ $y = 232$ $y = 420$.

59. Um wie viel übertrifft in der vorhergehenden Aufgabe die Bahngeschwindigkeit V jene des freien Falles in 3 Sekunden?

60. Angenommen die Erde sei in Ruhe und fange in dem Augenblicke zu rotiren an, als ein Stein von einem h Fuß hohen Thurme zu fallen beginne. Wo wird der Stein niederfallen, wenn die Rotationsgeschwindigkeit der Erde am Fuße des Thurmes = 1590 bayr. Fuß beträgt, und
1) $h = 360$; 2) $h) = 420$; 3) $h = 380$; 4) $h = 540$.

61. Welche Abweichung vom lothrechten Falle wird in der vorhergehenden Aufgabe der Stein in Wirklichkeit zeigen?

62. Welche Höhe und Wurfweite erreicht eine Kanonenkugel, welche mit der Geschwindigkeit v unter einem Elevationswinkel $= \alpha$ abgeschossen wird, im Falle
1) $v = 1600$; 2) $v = 1850$; 3) $v = 1940$; 4) $v = 1700$
$\alpha = 33^0$ $\alpha = 48^0$ $\alpha = 24^0$ $\alpha = 28^0$

63. Welches ist die Wurfgeschwindigkeit v und der Elevationswinkel α einer Geschützkugel, welche in t Sekunden eine Wurfweite x erreicht, wenn
1) $t = 2$; 2) $t = 3$; 3) $t = 4$; 4) $t = 5$
$x = 3000$ $x = 4560$ $x = 5200$ $x = 6400$.

64. Unter welchem Elevationswinkel wird die Wurfweite x einer Geschützkugel n mal so groß als die Wurfhöhe, im Falle
1) $n = 4$; 2) $n = 5$; 3) $n = 7$; 4) $n = 9$

65. Unter welchem Elevationswinkel erreicht eine Geschützkugel ihre größte Höhe h bei einer Wurfgeschwindigkeit, v wenn
1) $h = 350$; 2) $h = 490$; 3) $h = 520$; 4) $h = 630$
$v = 1800$ $v = 1950$ $v = 2100$ $v = 1760$.

66. Welches ist in der vorhergehenden Aufgabe die Wurfweite der Kugel?

67. Berechne den Elevationswinkel α und die Wurfgeschwindigkeit v, sowie die Zeit t aus der Wurfhöhe h und Wurfweite x, im Falle

1) $x = 2360$;	2) $x = 5940$;	3) $x = 590$;	4) $x = 750$
$h = 3580$	$h = 3190$	$h = 5370$	$h = 6370$.

68. Ein geworfener Gegenstand hat im Augenblick seiner größten Höhe h eine Bahngeschwindigkeit $= V$. Welches ist der Elevationswinkel α und die Wurfgeschwindigkeit v, sowie die Wurfweite x, wenn

1) $V = 960$;	2) $V = 1060$;	3) $V = 830$;	4) $V = 750$
$h = 590$	$h = 680$	$h = 950$	$h = 1640$.

69. In welcher Entfernung von der Mauer einer Kirche fällt ein über das ganze Dach rollender Stein nieder, wenn die Länge und Neigung desselben beziehungsweise $= s$ und α, und die Höhe der Mauer bis zum Dache $= h$ ist, im Falle

1) $\alpha = 50^0$;	2) $\alpha = 46^0$;	3) $\alpha = 53^0$;	4) $\alpha = 60^0$
$s = 160$	$s = 196$	$s = 214$	$s = 80$
$h = 75$	$h = 83$	$h = 68$	$h = 91$

70. Ein schwerer Punkt wird mit der Geschwindigkeit v längs einer schiefen Ebene von der Länge s und Neigung α aufwärts geworfen. Bestimme Ort und Zeit der Rückkehr zur Basis der Ebene, wenn

1) $v = 24$;	2) $v = 45$;	3) $v = 39$;	4) $v = 55$
$s = 9$	$s = 12$	$s = 94$	$s = 78$
$\alpha = 32^0$	$\alpha = 28^0$	$\alpha = 15^0$	$\alpha = 43^0$

71. Eine Kugel rollt vom höchsten Punkte eines horizontal liegenden Cylinders vom Radius r über dessen krumme Oberfläche (wie über eine schiefe Ebene). Bestimme Ort und Geschwindigkeit der Ankunft auf der horizontalen Unterlage des Cylinders, wenn

1) $r = 26$; 2) $r = 15$; 3) $r = 9$; 4) $r = 14$.

72. Wie muß das Rohr einer Kanone gerichtet werden, damit die Kugel mit der Geschwindigkeit v einen bestimmten Zielpunkt treffe, wenn dessen horizontale Entfernung = x und senkrechte Erhebung über den Horizont = y gegeben ist, im Falle

1) $v = 1800$;	2) $v = 1900$;	3) $v = 2000$;	4) $v = 1750$
$x = 4560$	$x = 7760$	$x = 4840$	$x = 9730$
$y = 350$	$y = 134$	$y = 224$	$y = 280$

73. Ein unter dem Winkel α mit der Geschwindigkeit v geworfener Körper hat nach einer gewissen Zeit die Höhe y erreicht. Bestimme die entsprechende Zeit t und horizontale Entfernung x, wenn

1) $\alpha = 37^0$;	2) $\alpha = 45^0$;	3) $\alpha = 51^0$;	4) $\alpha = 56^0$
$v = 360$	$v = 420$	$v = 280$	$v = 980$
$y = 396$	$y = 1070$	$y = 600$	$y = 5260$

IV. Centralbewegung.

74. Welches ist die Geschwindigkeit eines Punktes am Aequator der Erde und in der geographischen Breite φ, wenn der Radius der Erde (als Kugel betrachtet) = 21 860 930 b. Fuß*) und die Zeit einer vollen Umdrehung $\doteq 23^h\ 56'\ 4'' = 86164''$ m. Z. ist, im Falle
1) $\varphi = 48^0 50'$; 2) $\varphi = 51^0 44'$; 3) $\varphi = 63^0 20'$; 4) $\varphi = 33^0 54'$.

75. Wie groß muß der Durchmesser eines Mühlsteins genommen werden, wenn er in einer Minute 100 Umgänge machen soll, damit die Umfangsgeschwindigkeit = v werde, im Falle
1) $v = 26$; 2) $v = 24{,}8$; 3) $v = 25{,}5$; 4) $v = 25$.

76. Welches ist die mittlere Bahn- oder Revolutionsgeschwindigkeit der Erde, wenn der Bahnradius = 21 Millionen Meilen und die Umlaufszeit 365,25 Tage beträgt?

77. Um wie viel übertrifft die Bahngeschwindigkeit der Erde die Rotationsgeschwindigkeit derselben?

---

*) Diese Zahl ist die große Halbachse und nach der Angabe von Bessel genommen.

78. Die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde ist = 60 Erdhalbmessern à 21 850 930′, die Umlaufszeit = 27,3 Tagen. Welches ist die mittlere Bahngeschwindigkeit des Mondes?

79. Welches ist die Centrifugalbeschleunigung eines Punktes in der Aufgabe 74.

80. Welches ist die Centrifugalbeschleunigung der Erde bei ihrer Bewegung um die Sonne nach den Angaben in der Aufgabe 76?

81. In welcher Zeit müßte sich die Erde umdrehen, damit die Centrifugalbeschleunigung eines Punktes am Aequator der Beschleunigung der Schwerkraft gleich werde? (S. Aufg. 74.)

82. Welche Ausdehnung müßte die Erde annehmen, damit bei unveränderter Rotationszeit ein Punkt am Aequator kein Gewicht mehr habe?

83. Mit welcher Geschwindigkeit müßte ein Stein senkrecht in die Höhe geworfen werden, damit er nicht mehr zurückkehre?

84. Angenommen Erde und Mond stehen einen Augenblick still, so müßte die Erde gegen die Sonne, der Mond gegen die Erde zu fallen anfangen. Welchen Raum würde jeder dieser Körper in 10 Sek. durchlaufen, wenn die Masse der Sonne 355000*) mal so groß, als die der Erde ist? (S. Aufg. 76 u. 78.)

85. Die beobachtete Beschleunigung der Schwere an einem Orte der Erdoberfläche ist die Differenz aus der absoluten Beschleunigung G und der Centrifugalbeschleunigung F = a. Wie groß berechnet sich die Beschleunigung g_0 am Aequator aus jener $g = 9{,}8089^m$ in der geographischen Breite $\varphi = 48^0\,50'\,14''$, unter Annahme, daß die Erde eine Kugel sei?

86. Wie groß berechnet sich die Höhe unserer Atmosphäre, wenn ihre Grenze da angenommen wird, wo die Schwerkraft der Erde der Schwungkraft gleich ist?

---

*) Genauer 354936 nach Le Verrier.

87. Wie groß berechnet sich die Centrifugalbeschleunigung $F = a$ einer Kreisbewegung aus dem Radius r und der Umlaufszeit t, wenn

1) $r = 6{,}4$; 2) $r = 5{,}4$; 3) $r = 7{,}2$; 4) $r = 10$
$t = 2{,}5$ $t = 3{,}8$ $t = 4$ $t = 5{,}6$

88. An einem Faden von der Länge l wird ein schwerer Punkt in einem vertikalen Kreise so geschwungen, daß 5 Schwingungen auf 2 Sekunden kommen, und während des Aufsteigens plötzlich losgelassen. Der Punkt beschreibt eine Kurve und fällt nach t Sekunden in einer horizontalen Entfernung $= x$, vom Schwingungsmittelpunkt aus gerechnet, nieder. An welcher Stelle der Kreisperipherie wurde der Punkt losgelassen, im Falle

1) $x = 125$; 2) $x = 180$; 3) $x = 98$; 4) $x = 130$
$l = 2{,}4$ $l = 2{,}8$ $l = 1{,}9$ $l = 2$
$t = 5$ $t = 6$ $t = 3{,}5$ $t = 7$

89. Wie schnell muß ein Mann einen Reif vom Durchmesser 2′ mit gestrecktem Arme vertikal schwingen, damit ein hineingelegter Stein nicht herausfalle, wenn die Länge des Armes = 2′ angenommen wird?

90. Die Umlaufszeiten der Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn betragen beziehungsweise 87,9; 224,7; 686,9; 4332,6; 10759,2 Tage. Welches sind ihre Entfernungen von der Sonne, wenn die des Merkur zur Einheit angenommen wird?

91. Welches ist die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels von der Länge l an einem Orte, wo $g = 33{,}5'$, im Falle

1) $l = 3{,}2$; 2) $l = 4{,}5$; 3) $l = 5{,}2$; 4) $l = 7{,}9$.

92. Welches ist die Länge eines mathematischen Pendels, dessen Schwingungsdauer $= t$ ist, im Falle

1) $t = 5{,}2$; 2) $t = 2{,}4$; 3) $t = 3{,}5$; 4) $t = 5{,}4$
$g = 33{,}6$ $g = 33{,}5$ $g = 33{,}4$ $g = 33{,}3$

93. Wie groß berechnet sich die Beschleunigung g der Schwerkraft, wenn ein Pendel von der Länge l in 1 Minute n Schwingungen macht, im Falle

1) $n = 55$; 2) $n = 49$; 3) $n = 45$; 4) $n = 41$
$l = 4$ $l = 5$ $l = 6$ $l = 7$

94. Die Länge des Sekundenpendels in München und am Aequator ist beziehungsweise $0{,}99429^m$ und $0{,}98245^m$. Wie groß berechnet sich in beiden Fällen die Beschleunigung g?

95. Am Fuße eines 8000 Fuß hohen Berges in einer Entfernung vom Erdmittelpunkt = 21850000 Fuß macht ein Pendel in einer gewissen Zeit n Schwingungen. Wie viele Schwingungen wird dasselbe auf der Spitze des Berges in derselben Zeit machen, wenn
1) $n = 5000$; 2) $n = 6200$; 3) $n = 7980$; 4) $n = 8360$.

96. Auf der Spitze eines 10925 Fuß hohen Berges macht ein Pendel in einer gewissen Zeit 4000, am Fuße desselben 4002 Schwingungen in derselben Zeit. Wie groß berechnet sich hieraus die Entfernung vom Mittelpunkte der Erde?

97. Ein Pendel, welches in Paris 86400 Schwingungen macht, schwingt am Aequator in derselben Zeit nur 86274 mal. Wie groß berechnet sich hieraus die Beschleunigung am Aequator, da jene von Paris $9{,}8089^m$ beträgt?

98. Welche Entfernung vom Erdmittelpunkt hat Paris nach den Angaben der vorigen Aufgabe, wenn der Radius des Aequators = 6377390^m ist und die Schwungkraft unberücksichtigt bleibt?

99. Wie viele Schwingungen macht ein Pendel von der Länge l in 12 Stunden und wie viele Schwingungen wird dasselbe zurückbleiben, wenn sich l durch Einfluß der Wärme um den 3000ten Theil ausdehnt, im Falle
1) $l = 10$; 2) $l = 6{,}4$; 3) $l = 12$; 4) $l = 25$.

100. Ein Pendel, welches im Orte A Sekunden schlägt, macht innerhalb 24 Stunden in B 200 Schwingungen weniger als in A. Um wieviel ist das Pendel zu verkürzen, damit es den früheren Gang einhält?

101. Eine Pendeluhr, deren Gangwerk für ein Sekundenpendel construirt ist, geht täglich 2,5 Minuten zu spät. Durch

welche Aenderung der Pendellänge kann dieser Fehler beseitigt werden?

102. Wird ein Pendel so in Schwingung gebracht, daß der schwingende Punkt stets denselben horizontalen Kreis beschreibt, so heißt dasselbe Centrifugalpendel. Bestimme die Zeit t einer vollen Schwingung aus der Länge l und dem Ausschlagwinkel β.

V. Größe und mechanische Arbeit der Kräfte. Druck, Spannung, Reibung, Stoß.

103. Wie groß ist die Kraft P, welche der Masse m = Q ℔ auf einer glatten horizontalen Ebene die Beschleunigung a ertheilt, im Falle

1) Q = 48; 2) Q = 112; 3) Q = 280; 4) Q = 360
a = 12 a = 9 a = 15 a = 20

104. Wie groß berechnet sich der Druck einer elastischen Feder, welche einer Masse von Q ℔ die Beschleunigung a = 9, zu ertheilen vermag, im Falle

1) Q = 2,4; 2) Q = 3,5; 3) Q = 8; 4) Q = 12,5.

105. Welche Spannung hat ein Faden, an dessen einem Ende eine Masse = Q ℔ befestigt ist, während das andere Ende von der Hand eines Menschen über eine bewegliche feste Rolle geführt und festgehalten wird, je nachdem Q mit der Beschleunigung a = 3′ aufwärts oder abwärts bewegt wird, im Falle

1) Q = 8; 2) Q = 12; 3) Q = 19; 4) Q = 16,4.

106. Welches ist die größte und kleinste Spannung eines Fadens von der Länge l, an dessen unterem Ende eine Kugel von Q ℔ unter einem Ausschlagwinkel $\beta = 30^0$ in einer vertikalen Ebene schwingt, im Falle

1) Q = 4,5; 2) Q = 6,4; 3) Q = 7; 4) Q = 12
l = 3,7 l = 4,5 l = 4 l = 6

107. Auf einer horizontalen glatten Ebene befindet sich an dem einen Ende eines Fadens von der Länge l eine Q ℔ schwere Kugel, während das andere Ende befestigt und der Faden selbst bis zur natürlichen Spannung angezogen ist. Welche Spannung

erleidet der Faden, wenn die Kugel in der Richtung der Tangente so geschleudert wird, daß sie in 22 Sek. 7 Umläufe macht, im Falle

1) $Q = 2$; 2) $Q = 9$; 3) $Q = 7$; 4) $Q = 12$
$l = \pi$ $l = 5$ $l = 4$ $l = 6$

108. Welches ist die lebendige Potenz einer mit der Geschwindigkeit 1600′ abgeschossenen 12pfündigen Kanonenkugel, und welches ist der Widerstand eines Erdwalls, wenn dieselbe Kugel 1,5 Fuß tief in denselben eindringt?

109. Auf ein Mühlrad fallen in jeder Sekunde 60 Cubikfuß Wasser von einer Höhe = 5′. Wie groß berechnet sich die mechanische Arbeit des Wassers, wenn 1 C′ Wasser = 44,5 ℔ gerechnet wird?

110. Welche mechanische Arbeit verrichtet ein Pochstempel in 1 Stunde, wenn derselbe ein Gewicht = 50 ℔ und eine Hubhöhe = 2′ hat und in 1 Minute 40mal niederfällt?

111. Ein Kolben vom Durchmesser = 0,8 Fuß eines Dampfcylinders macht bei einer Hublänge = 1′ in 1 Min. 160 Wechsel (Hin- und Hergänge). Welche mechanische Arbeit verrichtet der Kolben während dieser Zeit, wenn die Spannkraft des Dampfes einen Druck = 1800 ℔ auf eine Fläche von 1 □′ ausübt?

112. Wie groß berechnet sich die Dampfkraft einer Lokomotive, welche einem Zuge vom Gewichte = 60000 Kil. (Kilogrammes) in 40 Sekunden eine Geschwindigkeit = $9{,}4^m$ mittheilt, wenn der Reibungscoeffizient des Geleises = 0,005 ist?

113. Welche mechanische Arbeit ist aufzuwenden, um einen Wagen von 1200 ℔ Gewicht von der Ruhe aus eine Geschwindigkeit = 4′ mitzutheilen; und welche Arbeit ist erforderlich, denselben in dieser Geschwindigkeit 30 Minuten lang zu erhalten, wenn der Reibungscoeffizient f = 0,004 ist?

114. Wie groß berechnet sich der Widerstand R und der Reibungscoeffizient f einer horizontalen Ebene, wenn eine mit der

Geschwindigkeit v geworfene Kugel vom Gewichte Q ℔. nach t Sekunden zur Ruhe kommt, im Falle (§ 127 und 142)

1) Q = 24;	2) Q = 18;	3) Q = 20;	4) Q = 32
v = 50	v = 32	v = 18	v = 24
t = 72	t = 81	t = 180	t = 144.

115. Wie groß berechnet sich der Reibungswiderstand der Scheidelatten eines Pochstempels, welcher Q ℔ wiegt und in t Sekunden von seiner Höhe h = 2,4 Fuß niederfällt, im Falle

1) Q = 18;	2) Q = 24;	3) Q = 30;	4) Q = 40
t = 0,5	t = 0,6	t = 0,7	t = 0,4.

116. Wie groß berechnet sich der Reibungscoeffizient f einer schiefen Ebene von der Länge s und Neigung α, wenn ein hinabrollender Körper den zehnten Theil der Zeit mehr braucht, als er ohne Reibung brauchen würde, im Falle

1) s = 60;	2) s = 78;	3) s = 96;	4) s = 44
$\alpha = 15^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 24^0$	$\alpha = 18^0$

117. Wie groß berechnet sich der Reibungscoeffizient f und der Reibungswiderstand R eines Schienengeleises, wenn ein mit der constanten Geschwindigkeit v und dem Gewichte Q ℔ fahrender Zug in t Sekunden nach Absperrung des Dampfes zur Ruhe kommt, im Falle

1) Q=260000;	2) Q=224000;	3) Q=185000;	4) Q=242000
t=230	t=240	t=235	t=300
v= 36	v= 38	v= 35	v= 40.

118. Welche Stoßkraft übt ein Q ℔ schwerer Körper auf eine horizontale Niederlage aus, wenn derselbe von einer Höhe = h herabfällt, im Falle

1) Q = 12;	2) Q = 140;	3) Q = 80;	4) Q = 250
h = 15;	h = 25	h = 92;	h = 124.

119. Ein Rammbär von Q ℔ Gewicht fällt von einer Höhe h auf einen Pfahl vom Gewichte Q, ℔ und treibt ihn mit 4 Schlägen 0,12′ tief in die Erde. Welches ist die mechanische Arbeit des Rammbärs und welches der Widerstand des Bodens,

oder die größtmögliche Belastung des Pfahles ohne einzusinken, wenn

1) $Q = 600$;	2) $Q = 750$;	3) $Q = 820$;	4) $Q = 440$
$Q_1 = 300$	$Q_1 = 360$	$Q_1 = 340$	$Q_1 = 390$
$h = 5$	$h = 4,6$	$h = 4,5$	$h = 4,4$

120. Mit welcher Geschwindigkeit muß ein Hammer niederfallen, wenn derselbe 1 ℔ wiegt und einen Nagel 2″ tief in ein Holz von der Widerstandsfähigkeit = 300 ℔ eintreibt?

121. Zwei unelastische Körper von Q_1 und Q_2 ℔ bewegen sich mit der constanten Geschwindigkeit v_1 und v_2 in gerader Linie gegen einander. Bestimme die gemeinschaftliche Geschwindigkeit v nach dem Stoße, sowie den Verlust an mechanischer Arbeit, im Falle

1) $Q_1 = 16$;	2) $Q_1 = 32$;	3) $Q_1 = 27$;	4) $Q_1 = 19$
$Q_2 = 24$	$Q_2 = 28$	$Q_2 = 23$	$Q_2 = 25$
$v_1 = 15$	$v_1 = 12$	$v_1 = 18$	$v_1 = 25$
$v_2 = 25$	$v_2 = 14$	$v_2 = 13$	$v_2 = 15$

122. Bestimme die Geschwindigkeit v und den Verlust an mechanischer Arbeit, wenn in der vorhergehenden Aufgabe die Bewegung beider Körper nach derselben Richtung erfolgt.

123. Eine unelastische Kugel von Q ℔ trifft eine ruhende Kugel von Q_1 ℔ mit der Geschwindigkeit v. Bestimme Q_1 wenn die Geschwindigkeit nach dem Stoße = 20 Fuß ist, im Falle

1) $Q = 12$;	2) $Q = 28$;	3) $Q = 4,8$;	4) $Q = 6,8$
$v = 30$	$v = 26$	$v = 35$	$v = 45$.

124. Eine senkrecht in die Höhe geworfene Kugel von 24 ℔ trifft in einer Höhe von h Fuß einen ruhenden Gegenstand von 30 ℔ Gewicht. Wie hoch werden beide Körper nach dem Stoße noch steigen, wenn die Wurfgeschwindigkeit = v und wenn

1) $h = 180$;	2) $h = 244$;	3) $h = 330$;	4) $h = 590$
$v = 1260$	$v = 1550$	$v = 1650$	$v = 1840$.

125. Welche mechanische Arbeit geht durch den Zusammenstoß zweier Eisenbahnzüge verloren, wenn sie mit der Geschwin-

digkeit v_1 und v_2 1) gegen einander, 2) nach einander fahren, im Falle ihre Lasten $Q_1 = 158000$, $Q_2 = 162000$ und

1) $v_1 = 32$; 2) $v_1 = 36$; 3) $v_1 = 25$; 4) $v_1 = 21$
$v_2 = 28$ $v_2 = 24$ $v_2 = 33$ $v_2 = 39$.

126. Während eine unelastische Kugel von Q ℔ über eine glatte schiefe Ebene von der Länge s und Neigung α von oben zu rollen anfängt, wird gleichzeitig eine andere Kugel von Q_1 ℔ der ersteren mit der Geschwindigkeit v von unten entgegen geworfen, so daß sie sich begegnen müssen. Mit welcher Geschwindigkeit kommen beide nach dem Stoße unten an, wenn

1) $Q = 8$; $Q_1 = 12$; $v = 40$; $s = 260$; $\alpha = 24^0$
2) $Q = 15$; $Q_1 = 9$; $v = 36$; $s = 320$; $\alpha = 30^0$
3) $Q = 16$; $Q_1 = 14$; $v = 92$; $s = 425$; $\alpha = 27^0$

127. Ein Pfahl soll so in den Boden geschlagen werden, daß er eine Belastung = 2600 Kil. zu tragen fähig ist. Wie tief darf derselbe mit den letzten 20 Schlägen noch eindringen, wenn der Rammbär 500, der Pfahl 400 Kil. wiegt und die Fallhöhe $1{,}3^m$ beträgt?

digkeit v_2 und v_1 1) gegen einander, 2) nach einander fahren, im Falle ihre Lasten $Q_1 = 158000$, $Q_2 = 162000$ und

1) $v_1 = 32$; 2) $v_1 = 36$; 3) $v_1 = 25$; 4) $v_1 = 24$
$v_2 = 28$ $v_2 = 24$ $v_2 = 33$ $v_2 = 20$.

126. Während eine unelastische Kugel von Q ß über eine glatte schiefe Ebene von der Länge s und Neigung α von oben zu rollen anfängt, wird gleichzeitig eine andere Kugel von Q_1 ß der ersteren mit der Geschwindigkeit v von unten entgegen geworfen, so daß sie sich begegnen müssen. Mit welcher Geschwindigkeit kommen beide nach dem Stoße unten an, wenn

1) $Q = 8$; $Q_1 = 12$; $v = 40$; $s = 360$; $\alpha = 24^0$
2) $Q = 15$; $Q_1 = 9$; $v = 36$; $s = 320$; $\alpha = 30^0$
3) $Q = 16$; $Q_1 = 11$; $v = 32$; $s = 125$; $\alpha = 27^0$

127. Ein Pfahl soll so in den Boden geschlagen werden, daß er eine Belastung = 2600 Kil. zu tragen fähig ist. Wie tief muß derselbe mit den letzten 20 Schlägen noch einbringen, wenn der Rammbär 500, der Pfahl 400 Kil. wiegt und die Fallhöhe $1,3^m$ beträgt?

Fre